共有資源のゲームにおけるノイズの効果
The Effect of Noise In Common Property Resource Use Game*

吉川 満
Mitsuru KIKKAWA†

平成 19 年 6 月 30 日

概 要

The problem of extracting commonly owned renewable resources is examined within an evolutionary-game-theoretic framework. It is shown that the existence of the locally stable coexistence's equilibrium in a well-defined sense against invasion by narrowly self-interested behavior. Mathematically, we apply nearly integrability, Poincaré map to the evoutionary-game. We discuss the importance of the thrid organization (the government, etc).

JEL: C73, D62, Q20

Key words：Common Pool Resource, Evolutionary Game, Noise, Nearly Integrability, Poinceré Map.

1 はじめに

今まで数え切れないほどの再資源可能な共有資源を取扱った研究が存在する．この研究の基本モデルを仮に複雑にしたとしても，その多くの論文の結論としての均衡は「鞍点」となっている．これは以下のロジックであった．例えばストックの動学はストックの成長率から経済主体が収穫したものとの差とすると，経済活動を盛んにすると，環境は破壊する．環境保護を推し進めると，経済活動が衰退する．つまり経済活動と環境との関係は利益が相反する．このことを経済主体と環境とのゲームとして考えると，各利得はゼロ＝サム (zero-sum) 型となる．ただしこのゲームで一方のみが凌駕するような結果とはならない．例えば経済主体が環境を食い潰すような砂漠化や環境が人間の経済活動を阻害するようなジャングルのようになることはない．よってこのゲームでの均衡は人間の経済活動と環境との共存が均衡点となるざるを得ない．その結果このゲームの Nash 均衡純粋戦略ではなく，混合戦略となる．そのためにこの混合戦略の均衡は Mini-Max 定理によって，均衡は「鞍点」となる．よってこのゲームの均衡が鞍点となるので，このゲームは大域的に不

*本稿は吉川 [13, 14] を基礎として再構成し，加筆訂正を行ったものである．

†mitsurukikkawa@hotmail.co.jp

安定なシステムとなる. だからこそ人間が利己的に行動すると, コモンズ (commons) の悲劇が起こる. それを防ぐために, 例えば税金・罰則などを課し, この悲劇を起こらないように行動させるというものである (Hardin [7]).

しかしこのような視点で現実社会を眺めると, 古くから経済主体自らがコモンズの悲劇を防ぐ制度を作ってきている. 例えば日本では古くから農業組合, 漁業組合など様々な組合という制度を自発的に作り, 時代に応じてその制度を変化させきた. これを説明する理論的準備ができていない. そのため本稿では, 上記のことを説明するための理論的準備を行う. そこで「ノイズ (noise)」(ここでは新規にゲームに参加する人の存在) が存在する場合を考える.[1] 例えばこれは次のような経済を想定している. 今まで農業を行っている集落に「新入り」がいる場合, 今までの制度・慣習を引き継ぐのか, それとも新しい制度・慣習を作るのかを考える.

このノイズ, 摂動項 (perturbation) の問題は数学的には, 近可積分系 (nearly integrable system) で取扱われている. この近可積分系は数理物理学でよく研究されており, 単に微小なノイズの下で攪乱を受けた軌道を理解するためだけの抽象的モデルではない. その後の古典力学の発展の中で, 特に大域的性質を研究する上で近可積分系は未知な構造の明確な概念化に大きな役割を果たすことになった. 微小なノイズというところから, 積分の崩壊に伴う様々な普遍則を導くことを可能にし, それまでの解析力学の概念装置を越えて, 全く新たな理想モデルが近可積分系であるといえる. それゆえこの近可積分系の挙動を完全に理解すること, それが古典力学の基本問題 (the fundamental problem) と言われている.

このように近可積分系の議論は, 重要であるにも関わらず, 進化ゲーム理論では議論されていない. 例えば今まで進化ゲーム理論の研究の流れは, 戦略系ゲーム理論と進化ゲーム理論との関係や学習, 模倣の効果 (Fudenberg and Levine [5]) に着目し, 発展してきている. その中でノイズを用いた研究は数多く存在するが, その多くが非線形の効果を捨て, より単純化を行うという局所的な方法を用いている. しかし非対称 2 人ゲームはこの非線形項が重要であった. よってこの非線形項をも考慮に入れる, 大域的な方法 (第 1 積分, Lyapunov 関数) が重要であるにも関わらず, この大域的な方法にノイズがあるときの分析方法 (近可積分系) は, 数理物理学で発展してきているために, 基礎となっている前提条件や対象としているモデルが異なる. そのため進化ゲーム理論の枠組みで研究した先行研究は存在しない. そこで, 本稿はその前提条件が異なっていたとしても, 進化ゲーム理論の枠組みで議論できるということを調べた. よって本稿はこれらの流れとは異なり, 近可積分系の議論を進化ゲーム理論の枠組みで行うという, 新たな方法論の拡張を行った. 具体的には, Kolmogorov-Arnold-Moser (以下, KAM の定理) の証明. また, ノイズを導入することによって, 新たな漸近安定な内点均衡が生まれ, それが変化していくという Arnold 拡散 (diffusion) が存在することを証明した. 今までこの Arnold 拡散は, Melnikov の方法によって証明されていた (Holmes and Marsden [10]) が, それとは別にゲーム理論の文脈から導いた. さらには, 漸近安定な内点均衡, 共存均衡の証明に平均 Lyapunov 関数を用いて, パーマネンス (permanence) の存在を考えていた (Jansen [11]) が, 本稿では, ノイズが存在することによって, 不局所安定であった内点均衡が局所安定となる, ということを利用した.

[1] 例えば, Gale, *et al.*[6] では, 最終提案ゲームにこのようなノイズが存在することによって, 利己的な行動からは説明できなかった公平な取引の発生を説明している.

本稿では Sethi and Somanathan[17] に従い, 共有資源のゲームを定式化を行う. Sethi and Somanathan[17] では, 対称 2 人ゲームの枠組みで戦略が 3 つ存在する場合を考え,「共有地の悲劇」を回避する均衡の存在を証明した. それに対し本稿では, 非対称 2 人ゲームの枠組みで, 戦略が 2 つ存在する場合を考える. このようなゲームのとき, 複数均衡を持つような大域的不安定なシステムでは純粋戦略か混合戦略 (内点) のどちらの均衡に収束するのかは初期値により決まる. この大域的に不安定なシステムにノイズが存在すると, システム, ゲームの性質が変化し, 漸近安定な均衡 (制度) を作る. つまりこのノイズの影響で, 妥協点が生まれる. またこの妥協点が変化していくことが可能 (Arnold [1]) であるということを定式化した. さらには均衡が局所不安定な場合, つまり経済活動と環境の利益が相反する場合にも, 安定な周期軌道の存在の条件を導いた.

本稿は次のように構成されている. 2 節では, 共有資源のゲームの基本的なモデルを記す. 3 節では, 環境がする場合としない場合それぞれの均衡を求め, その安定性を調べた. またノイズが存在し, その均衡の安定性, 新たな均衡の発生を調べ, 横断面の発生を考えた. 4 節では, 環境にもノイズが存在し, 局所不安定な場合を考える. そこで Poincaré 写像を導入し, 安定な周期軌道の存在を考えた. 5 節で, 結論とこのモデルを現実社会に当てはめ, このモデルから得られる結論を述べる.

2 モデル

私たちは資本理論 (capital theory) の枠組みで n 人ゲームのコモンズのモデル (Dasgupta and Heal [4], 宇沢 [18]) を基礎として, 進化ゲーム理論を用いてモデル (Sethi and Somanathan [17]) を作る. この経済にはある集団に属する有限の主体がおり, その主体間には他人以外の戦略を見て, 自分の戦略を決定するという直接的な相互作用がある. この主体は有限の n タイプの主体がいる. この主体らはコモンズからどれだけ収穫するという労働の結果でその主体の効用・適応度 (fitness) が決定される. このような経済は例えば, 農業を想定している.[2]

まず i タイプの主体によって単位時間当たりの労働供給は $l^i(\geq 0)$ によって, 総労働供給量 L は次のように個々の労働供給量の総和で示す.

(2.1) $$L=\sum_{i=1}^{n} l^i.$$

コモンズの総ストックを $K(\geq 0)$ によって示す. 単位時間当たりの総収穫高は総労働供給量 L と現存するコモンズのストック K の関数 $H(L,K)$ とする. ただしこの関数に次のような条件を課す.(ただし, 添え字は偏微分を示している.)

(2.2) $$H_L>0,\ H_K>0,\ H_{LL}>0, H_{LK}>0,\ H(0,K)=H(L,0)=0.$$

これが示していることは, 単位時間当たりの総収穫高 H は総労働供給量やコモンズの大きさによる増加関数とする. 所与のコモンズの下で, 追加的な労働の増加による追加的な収穫量は明らかに減少する. またコモンズが大きければ大きいほど, 追加的な労働からの総収穫量を限界的に増加するであろう. そして総労働供給量とストックのどちらかが 0 であるときの収穫量は 0 である. ただしコモンズのストックの一定の場合, $K=K_0$, $h(L)=H(L,K_0)$

[2] 宇沢 [18] では主体の生産関数の形によって, 漁業, 森林, 農業のコモンズという分類分けを行っている. この意味で農業である.

と書く.

次に利得・適応度について記す. 総収穫量の分け前は i タイプの主体の努力によって比例的に分配される. その分け前を π^i とし, それを i タイプの主体の利得・適応度と呼ぶ. また労働のコスト w は労働賃金や機会費用を表し, 外生的に一定であるとする. ただしその値には上限が存在し, 収穫したストックの価格は1に規格化されている.[3] すると, 主体 i の利得・適応度は次のように表すことができる.

(2.3) $\qquad \pi^i(l^1,\cdots,l^n) = \dfrac{l^i}{L}h(L) - wl^i.$

それゆえ総利得 $P(l^1,\cdots,l^n)$ は次を満足する.

(2.4) $\qquad P(l^1,\cdots,l^n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\pi^i = h(L) - wL.$

ここで社会的に効率な労働供給量を求める. L_E を総利得を最大にする総労働供給量とする.(図1を参照) すると, 社会的に効率な労働の限界生産高は労働コストと等しくなる. また関数 h の凹性より, L_E は唯一である. l_E はこれに対応する各個人の労働供給量: $nl_E = L_E$ とする. つまり, 以下のようになる.

(2.5) $\qquad h'(L_E) = w.$

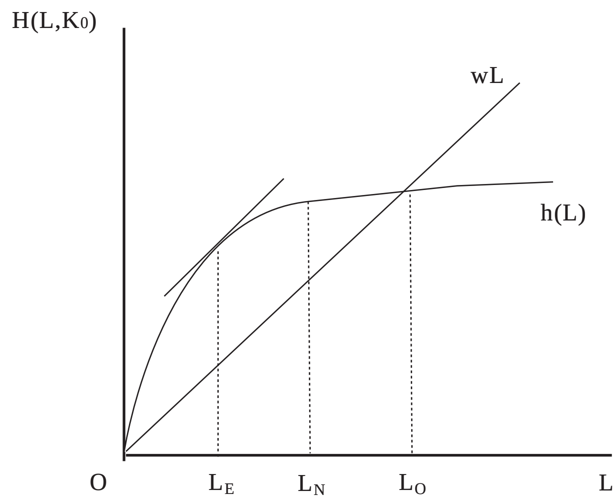

図 1: 総労働供給量と総収穫高との関係

今後の表記の簡単化のために次のように, 平均労働生産性という利得を導入する.

(2.6) $\qquad A(L) \equiv \dfrac{h(L)}{L}.$

これと (2.3) から, i タイプの主体の利得を次のように表すことができる.

(2.7) $\qquad \pi^i(l^i,L) = l^i(A(L) - w).$

このときの総利得は, 次のように表すことができる.

(2.8) $\qquad P = L(A(L) - w).$

ここで, 社会的に効率なものと各主体が利己的な行動をしたときの労働投入量を比べる

[3] その結果, $wL \le H(L_0,K_0)$ である. ただしこれと等しくなる点を L_O とする. w は内生的な変数の場合, 後述する Replicator 方程式に変形するときに, π^i の中に含まれ, w が外生変数であるのか, 内生変数であるのかという違いは本質的に関係ない.

ために, Nash 均衡を求める．各主体は利己的な行動をとるから, 主体 i の労働投入量は, 主体 i の利得を最大化している．よって (2.7) の 1 階条件から

$$\left(1-\frac{l^i}{L}\right)\frac{h(L)}{L}+\frac{l^i}{L}h'(L)-w=0,$$

となる．これを主体 i について集計し, このときの総労働供給量を L_N とすると,

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{h(L)}{L_N}+\frac{1}{n}h'(L_N)=w \tag{2.9}$$

となる．これと (2.5) より, 総労働供給量: $L_E < L_N$ と分かる．よって個々の主体の合理的行動の結果である Nash 均衡では社会的に最適な労働投入量を上回る労働の投入がなされてしまい, コモンズは枯渇してしまう.[4]

以上をまとめると次の命題となる.

命題 1. (Sethi and Somanathan [17] 命題 1) この共有資源のゲームには, 唯一の Nash 均衡を持つ．その均衡はすべての主体 i に対して $l^i = l_N$ 対称的である．それは非効率であり, $l_E < l_N$ となり, 枯渇する可能性がある．また正の利潤を得るためには, 均衡で, $L_N \equiv nl^n < L_O$ であり, $A(L_N) > w$ である.

ここで主体 i は有限個の戦略 j で労働投入量 l^i_j を決定するとする．また戦略 j を取ったときの利得・適応度が多ければ, それをとる人が多くなるとする．進化ゲーム理論を用いて議論するために各主体の労働投入量を以下のように定める.

そこで t 期に i タイプの人が戦略 j をとっている人のシェアを $s^i_j(t)=\dfrac{l^i_j(t)}{L(t)}$ とし, ただし $L(t)=\displaystyle\sum_{i,l} l^i_j(t)$ とすると, (2.7) は次のように変形できる．ただし今後標記の簡単化のために, t を書かない.

$$\dot{s}^i_j = s^i_j(\pi^i_j-\overline{\pi}^i), \bar{\pi}^i=\sum_{i=1}^{n} s^i_j l^i_j. \tag{2.10}$$

特に本稿では, 2 タイプの主体 (タイプ 1 とタイプ 2) がいる場合を考える．そして, その主体は 2 つの戦略 (戦略 C と戦略 D) を用いて, 利得を得ているとする．そこで戦略 C,D をとっているときの労働供給量をそれぞれ l^i_l, l^i_h とする．ただし $l^i_E \le l^i_l < l^i_h \le l^i_N$, $i=\{1,2\}$ とする．よって総労働投入量は次のようになる.

$$L=\{(1-s^1)n^1l_l+s^1n^1l_h\}+\{(1-s^2)n^2l_l+s^2n^2l_h\},\ n^1+n^2=n.$$

以上より t 期のゲームは次のような利得表で表すことができる．ただし $f_p=\pi^1_j(l_j,L)=l_j(A(L)-w)$, $g_p=\pi^2_j(l_j,L)=l_j(A(L)-w)$ とし, $p=\{1,2,3,4\}$, $j=\{C,D\}$ とする.

1＼2	戦略 C	戦略 D
戦略 C	f_1, g_1	f_3, g_3
戦略 D	f_2, g_2	f_4, g_4

利得表 1

ここで戦略 C をとったときの利得と戦略 D をとったときの行動と利得の大小を明示的に設定しない．またこのとき主体 1 が戦略 C をとっている人のシェアを y, 主体 2 が戦略

[4] もしストックに対して「自由にアクセス」(open access) ならば, 上限なしに利用者の数は増加する ($n \to \infty$). そのために総利得がゼロとなり, 各個人の利潤 π^i がゼロとなる.

D をとっている人のシェアを x とすると, Replicator 方程式は次のようになる.

$$\dot{y} = y\{f_1(1-x) + f_3x - [f_1y(1-x) + f_2(1-y)(1-x) + f_3yx + f_4(1-y)x]\},$$

$$= y(1-y)\{a-(a+c)x\}, \tag{2.11}$$

$$\dot{x} = x\{g_3y + g_4(1-y) - [g_1y(1-x) + g_2(1-y)(1-x) + g_3yx + g_4(1-y)x]\},$$

$$= x(1-x)\{d-(b+d)y\}. \tag{2.12}$$

ただし, $f_1 - f_2 = a$, $g_4 - g_2 = d$, $f_4 - f_3 = c$, $g_1 - g_3 = b$ とする.
よってこのゲームは, 以下の利得表 2 で表現されるゲームであると分かる.

1＼2	戦略 C	戦略 D
戦略 C	a,b	0,0
戦略 D	0,0	c,d

利得表 2

次に Gale, et al. [6] にあるように, (2.7) 式に関して, タイプ 1 については, $\delta_1\left(\dfrac{l^1+l^2}{2}\right)$, タイプ 2 については, $\delta_2\left(\dfrac{l^1+l^2}{2}\right)$ という新規参入者の数を加え, さらにはそれと同じ数だけの数の人がゲームから退出するとする. 先ほどと同様に, Replicator 方程式を導出する. ただし $0 < \delta_1$, $\delta_2 \ll 1$ とする. すると次のようになる.

$$\dot{y} = (1-\delta_1)y(1-y)\{a-(a+c)x\} + \delta_1\left(\frac{1}{2} - y\right), \tag{2.13}$$

$$\dot{x} = (1-\delta_2)x(1-x)\{d-(b+d)y\} + \delta_2\left(\frac{1}{2} - x\right). \tag{2.14}$$

3　安定性

Replicator 方程式 (2.11), (2.12) の安定性を調べる. まずは環境が変化しない場合を取り上げ, 次に環境が変化していく場合を取り上げる.

3.1　環境が変動しない場合

3.1.1　局所安定性

次にこのゲームの Nash 均衡の局所安定性を調べる. Replicator 方程式 (2.11),(2.12) の左辺 $= 0$ は進化的に安定な戦略 (ESS) であるが, 本稿では進化的に安定な戦略であるならば, Nash 均衡であるということを前提として, 話を進める . (2.11), (2.12) から, $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$ となる (y, x) の組みを (y^*, x^*) と置くと, この (y^*, x^*) は, 進化的に安定な戦略となる. よって考えられる Nash 均衡は以下の 5 点存在する.

$$(y^*, x^*) = (0,0),\ (0,1),\ (1,0),\ (1,1),\ \left(\frac{d}{b+d}, \frac{a}{a+c}\right) \tag{3.1}$$

ただし, 内点解が存在するためには, $0 \le \dfrac{d}{b+d} \le 1$, $0 \le \dfrac{a}{a+c} \le 1$, つまり, d と $(b+d)$, a と $(a+c)$ の符号が一致することが必要である.

次にこれらの均衡の局所安定性を考える. それぞれ戦略の均衡の場合は, 次のようにまとめることができる.

命題 2.　方程式 (2.11), (2.12) において, 各純粋戦略の均衡の局所安定性は次の条件を満たすとき, 各純粋戦略の均衡は漸近安定である．また混合戦略の均衡, 内点均衡は $\dfrac{abcd}{(a+c)(b+d)}$ が負となるときは, リミットサイクル (limit cycle) となり, 正となるときは, 鞍点となる．

$$(y^*, x^*) = (0,0) \text{ のときは, } a<0, d<0, \quad (y^*, x^*) = (0,1) \text{ のときは, } c>0, d>0,$$
$$(y^*, x^*) = (1,0) \text{ のときは, } a>0, b>0, \quad (y^*, x^*) = (1,1) \text{ のときは, } b<0, c<0.$$

証明: 付録を参照.

よってこの命題から $\dfrac{abcd}{(a+c)(b+d)}$ が負のときは, 内点均衡は双曲型不動点とならず, 楕円型不動点となる．そのためにこの方程式系は構造不安定 (structurally unstable) となる．よってもとの方程式系 (2.11),(2.12) にノイズが存在すると, 解の性質が変わってしまう性質を持っていることが分かる．

そこで次に, ノイズが存在する Replicator 方程式系 (2.13), (2.14) においては次の命題が成り立つ[5].

命題 3.　ノイズが存在する Replicator 方程式 (2.13), (2.14) において, $\dfrac{abcd}{(a+c)(b+d)} < 0$ のとき, 内点均衡は漸近安定となり, その均衡は存在し, リミットサイクルとなっている．

証明: 付録 を参照.

この命題から $\dfrac{abcd}{(a+c)(b+d)}$ が負のとき, 内点解は漸近安定となるということが分かった．さらに大域的に不安定となるゲームの場合, この条件を満たすのは, 純粋戦略が 2 つの組ではなく, 均衡が純粋戦略と混合戦略の組のみであることが分かる．

3.1.2　第 1 積分

今までは均衡点の周りの安定性を考えてきた．ある条件の下では, 構造不安定となり, ノイズが存在する場合, ゲームの解構造が変化することが分かった．そのため, ある条件の下では, 漸近安定な内点均衡が発生する．ではこのノイズが均衡の周りだけではなく, ゲーム全体に与える影響を考える必要がある．そこでこの節では, 第 1 積分 (first integral) を求め, これを使い, ノイズがこのゲーム全体に与える影響を考える．

[5]数学としてこの問題を考えたときには, 局所安定性は変更する可能性が存在する．しかしゲーム理論の枠組みで考えたとき, $0 < \delta_1$, $\delta_2 \ll 1$ であるので, 例えば $b + \delta_1$ のときに, その符号まで変更しない．なぜなら符号が変更するような状況の場合, どちらの戦略をとっても利得差が十分小さいようなときには, このゲームを行っているプレイヤーはどの戦略をとっても利得差が存在せず, 戦略的に行動しないと考えることができるので, 符号が変更する場合は排除する．

まずノイズがない場合の第1積分を Hofbauer[9][6], 吉川 [12] にあるように導出する[7]と,

$$H(x,y) = \log \frac{y^d(1-y)^b}{x^a(1-x)^c} = \log x^{-a}y^d + \log(1-x)^{-c}(1-y)^b \tag{3.2}$$

となる．また, $\dfrac{dH}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial H}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t} = 0$ でとなるので, 保存系 (conservative system) である．

次にノイズがある場合の第1積分を導出すると,

$$H^n(x,y,\delta_1,\delta_2) = \log \frac{y^{d(1-\delta_2)}(1-y)^{b(1-\delta_2)}\left(\dfrac{1}{2}-y\right)^{\delta_2}}{x^{a(1-\delta_1)}(1-x)^{c(1-\delta_1)}\left(\dfrac{1}{2}-y\right)^{\delta_1}} \tag{3.3}$$

となる．またノイズが存在する場合は $\dfrac{dH_n}{dt} \neq 0$ となるので, 時間と共に Hamiltoninan H^n の値は変化する．そのために, この値は $\log\dfrac{0}{0}$, $\log\dfrac{\text{分子}}{\text{小数分母}}$, となる可能性が存在する．よって Hamiltoninan H^n の値が不定, 発散する可能性がある．この問題を考えたのが, KAM の定理である．KAM の定理はいろいろな表記がある．また KAM のオリジナルの論文でのモデルと進化ゲーム理論のモデルとは仮定が異なる．本稿で考えた KAM の定理はノイズが十分小さいとき, Hamiltoninan H^n の値が発散しないような不変トーラスの存在の有無を考えたものとする．これをまとめると次のようになる．

命題 4. (KAM の定理, Arnold and Avez [2] を変更)　ほとんどすべての δ_1, δ_2 に対して[8], ノイズが存在する不変トーラスでノイズが存在しない場合の不変トーラスに近いものが正の測度で存在する．

証明: 付録 を参照.

定理 1.　純粋戦略と混合戦略という複数均衡を持つ大域不安定なゲームに, ノイズが存在し, $\dfrac{abcd}{(a+c)(b+d)} < 0$ を満たすとき, Arnold 拡散が存在する．

証明: 付録 を参照.

以上のように均衡の性質を探る局所的な方法とシステム自体を考える大域的な方法の両方を用いることによって, Arnold 拡散が存在する条件を Melnikov の方法 [16], [10] を用いず導出した.

---

[6]この第 1 積分と Hamilton 系と比較を行っている． 実際この Hamiltoninan H は, 次の正準方程式 (canonical equation) を満たすので, Hamilton 系となることが分かる.

$$\dot{x} = P(x,y)\frac{\partial H(x,y)}{\partial y}, \quad \dot{y} = -P(x,y)\frac{\partial H(x,y)}{\partial x}$$

ただし, $P(x,y) = x(1-x)y(1-y)$ である.

[7]Lotka-Volterra 系において, 第 1 積分の導出などの詳細が Hirsch and Smale [8] に書かれている．また この第 1 積分は, Lyapunov 関数である．しかし, 本稿ではこの Lyapunov 関数を用いて, 大域安定性の議論は行わない．読者の誤解を避けるために, 第 1 積分とした.

[8]Lebesgue 測度 0 のある集合を除いた残りすべての δ_1, δ_2 の値の組に対して

3.2 環境が変動する場合

次にこのゲームでは, 以下のような環境に変化がある場合を考える. ただし標記の簡単化のために, 期間を表わす変数 t は書かない.

(3.4) $\dot{K} = G(K) - H(L, K)$

ただし, $G(K)$ は K のときに自然が自ら回復するストック量とする. ここで K_L を $G(K) - H(L, K)$ が正となる下限のときのストックとする. K が K_L を下回るとストックが少なく収穫-自己成長のバランスが崩れて, 再生産が困難となり, ストックは減少し始める. この K_L を「最小ストック量」を呼ぶ. 逆に K_M は $G(K) - H(L, K)$ が正となる上限であり, K がこの水準を上回ると, 収穫 – 自己成長のバランスが崩れて, 純再生産はマイナスとなる. この K_M をコモンズの有限の許容量 (carrying capacity) と呼ぶ. 仮定より, K_L と K_M の間には, $G(K) - H(L, K)$ が最大となる最適なストック $\bar{K}$ を持つとする. つまり, 以上をまとめると次のような関係が成り立っている. (図 2 参照)

$K > K_M$ のとき, $G(K) < 0$,

$K_L < K < K_M$ のとき, $G(K) > 0$,

$0 < K < K_L$ のとき, $G(K) < 0$.

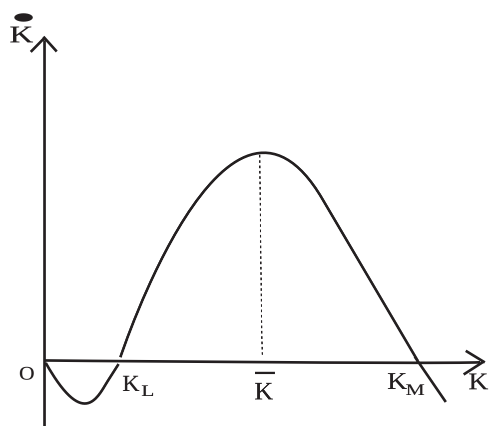

図 2: ストックの変化を表す曲線, $\dot{K} = G(K)$.

3.2.1 局所安定性

次にこのゲームの Nash 均衡の局所安定性を調べる. ここで Replicator 方程式 (2.11),(2.12), 環境変動の方程式 (2.13) で $\dot{y} = 0$, $\dot{x} = 0$, $\dot{K} = 0$ となるような (y, x, K) の組を (y^*, x^*, K^*) と置くと, 考えられる均衡 (y^*, x^*, K^*) は, $(0, 0, K^*)$, $(0, 1, K^*)$, $(1, 0, K^*)$, $(1, 1, K^*)$, $\left(\frac{d}{b+d}, \frac{a}{a+c}, K^*\right)$ である. ただし内点解が存在するためには, $0 \leq \frac{d}{b+d} \leq 1$, $0 \leq \frac{a}{a+c} \leq 1$, つまり d と $(b+d)$, a と $(a+c)$ の符号が一致することが必要である.

次にこれらの均衡の局所安定性を考える. それぞれ戦略の均衡の場合は, 次のようにまとめることができる.

命題 5. 各純粋戦略の均衡の局所安定性は次の条件を満たすとき, 各純粋戦略の均衡は漸近安定である. また混合戦略の均衡, 内点解は漸近安定ではない.

$$
\begin{aligned}
(y^*, x^*, K^*) &= (0,0,K^*) \text{ のときは,} \quad a<0, d<0, E<0,\\
&= (0,1,K^*) \text{ のときは,} \quad c>0,\ d>0, E<0,\\
&= (1,0,K^*) \text{ のときは,} \quad a>0,\ b>0, E<0,\\
&= (1,1,K^*) \text{ のときは,} \quad b<0,\ c<0, E<0.
\end{aligned}
$$

ただし, $E = G'(K) - H_L \dfrac{\partial L}{\partial K} - H_K$ とする.

証明: 付録 を参照.

次に前節と同様に, ノイズが存在する場合の均衡の安定性について考える. すると次のような命題となる.

命題 6. ノイズが存在する場合, Replicator 方程式 (2.13), (2.14) は $E<0$ のとき, 漸近安定な内点均衡が存在する.

証明: 付録 を参照.

この命題から $E<0$ のとき, 内点解は漸近安定となるということが分かった. 大域的に不安定となるゲームの場合, この条件を満たすのは $E<0$ で均衡が複数均衡生じるときであるということが分かる.

3.2.2 第 1 積分

先ほどと同様に第 1 積分を求め, これを使い, ノイズがこのゲーム全体に与える影響を調べる. まずノイズがない, ある場合の第 1 積分は変わらず, 環境変化の方程式 (3.4) によって, 第 1 積分の値が変化する. すると定理 1 と同様, 環境に変化が存在する場合次のような定理 2 が証明される.

定理 2. 複数均衡持つ大域不安定なゲームに, ノイズが存在し, 環境の項の固有値 $E<0$ 場合, Arnold 拡散が存在する.

証明: 付録を参照.

4 内点均衡が漸近安定ではない場合

今までは均衡が安定な場合に, $E<0$ のとき漸近安定であった. この節では, $E>0$ の場合を考える. そのため局所的な分析では, 分からない軌道経路, 大域的な概念が重要となる. この大域的な概念を考える際に, Poincaré 写像の考え方を用いて議論する. 特に本節では, Wiggins [20] にある考え方を用いる. 具体的にはノイズが存在するときの固有値が

$(-\delta_1, -\delta_2, E)$ (ただし δ_1, δ_2, $E > 0$, さらには一般性を失うことなく, $\delta_1 < \delta_2$ とする.) の場合を考える．よってこのときの各均衡は漸近安定ではない．さらにはそのときのゲームの均衡が唯一であり, 環境の項にノイズが存在する場合を考え, μ を導入する.

(4.1) $\qquad \dot{K} = G(K) - H(L, K) + \mu$

この節ではノイズがある Replicator 方程式 (2.13),(2.14), ノイズがある環境の方程式 (4.1) の方程式 3 本のゲームを考える．そこで適切に選ばれた断面上の Poincaré 写像を計算する標準的方法で Γ の近傍での軌道構造を解析する．この Poincaré とは, 軌道を 2 つの写像, $P_0 \mapsto P_1$, $P_1 \mapsto P_0$ を組み合わせることによって, 全軌道を表わすことができ, 本節ではその安定性を考える．そこで流れ (flow) に横断的な 2 つの長方形をある $\varepsilon > 0$ について次のように選ぶ.

$$\Pi_0 = \{(y, x, K) \in \mathcal{R}_+ || y| \le \varepsilon, x = \varepsilon, 0 < K \le \varepsilon\},$$
$$\Pi_1 = \{(y, x, K) \in \mathcal{R}_+ || y| \le \varepsilon, |x| \le \varepsilon, K = \varepsilon\},$$

まずある均衡の十分近くに位置する Π_0 から Π_1 への写像を P_0 とする．これを求めるため, 各均衡で線形化されたそれぞれの流れは

(4.2) $\qquad y(t) = y_0 \exp(\delta_1 t),\ x(t) = x_0 \exp(\delta_2 t),\ K(t) = K_0 \exp(Et)$

で与えられる．また Π_0 から Π_1 への時間は $t = \dfrac{1}{E} \log \dfrac{\varepsilon}{K_0}$ となる．これを (4.2) に代入することによって, 写像 $P_0 : \Pi_0 \to \Pi_1$ は,

$$(4.3) \qquad \begin{pmatrix} y \\ \varepsilon \\ K \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y\left(\dfrac{\varepsilon}{K}\right)^{\frac{\delta_1}{E}} \\ \varepsilon\left(\dfrac{\varepsilon}{K}\right)^{\frac{\delta_2}{E}} \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

となる．次に写像 P_1 を計算する．$P_1 : \Pi_1 \to \Pi_0$ は, Π_0 上の点 p_0 の周りで, Affine 写像を取ると,

$$(4.4) \qquad \begin{pmatrix} y \\ \varepsilon \\ K \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ p_3 & p_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_5\mu \\ 0 \\ p_6\mu \end{pmatrix},$$

となる．ただし $p_i > 0 (i = 1, \cdots, 6)$ は定数である．ここで μ を上手に選ぶことによって, $p_6 = 1$ と規格化を行う.

次に写像 P_0 と P_1 を構成することで, 3 本の方程式の近傍で定義された Poincaré 写像 P を得る.

$$P \equiv P_1 \circ P_0 : \Pi_0 \to \Pi_0,$$

$$(4.5) \qquad \begin{pmatrix} y \\ K \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} p_1 y\left(\dfrac{\varepsilon}{K}\right)^{\frac{\delta_1}{E}} + p_2\varepsilon\left(\dfrac{\varepsilon}{K}\right)^{\frac{\delta_2}{E}} + p_5\mu \\ p_3 y\left(\dfrac{\varepsilon}{K}\right)^{\frac{\delta_1}{E}} + p_4\varepsilon\left(\dfrac{\varepsilon}{K}\right)^{\frac{\delta_2}{E}} + \mu \end{pmatrix},$$

次にこの Poincaré 写像の不動点を探す．(4.5) から, 不動点においては以下のことが成り立つ.

$$(4.6) \qquad y = AyK^{\frac{-\delta_1}{E}} + BK^{\frac{-\delta_2}{E}} + p_5\mu, \qquad K = CyK^{\frac{-\delta_1}{E}} + DK^{\frac{-\delta_2}{E}} + \mu,$$

ただし, $A = p_1\varepsilon^{\frac{\delta_1}{E}}$, $B = p_2\varepsilon^{1+\frac{\delta_2}{E}}$, $C = p_3\varepsilon^{\frac{\delta_1}{E}}$, $D = p_4\varepsilon^{1+\frac{\delta_2}{E}}$ とする．(4.6) を K の関数

として y について解くと, 十分小さい K については

$$(4.7)\qquad y = \frac{BK^{\frac{-\delta_2}{E}} + p_5\mu}{1 - AK^{\frac{-\delta_1}{E}}} = \left(BK^{\frac{-\delta_2}{E}} + p_5\mu\right)\left(1 + AK^{\frac{-\delta_1}{E}} + \cdots\right)$$
$$\approx BK^{\frac{-\delta_2}{E}} + p_5\mu$$

となる.

(4.6), (4.7) より, K と μ のみの不動点に関する次の条件が得られる.

$$(4.8)\qquad K - \mu = CBK^{-\frac{\delta_1+\delta_2}{E}} + Cp_5\mu K^{\frac{-\delta_1}{E}} + DK^{\frac{-\delta_2}{E}}$$

(4.8) の左辺と右辺についてそれぞれ考えることによって, 交点, 不動点を探す. まず (4.8) の右辺の傾きを求める.

$$(4.9)\qquad \frac{d}{dK}\left(CBK^{-\frac{\delta_1+\delta_2}{E}} + Cp_5\mu K^{\frac{-\delta_1}{E}} + DK^{\frac{-\delta_2}{E}}\right)$$
$$= -\frac{\delta_1+\delta_2}{E}CBK^{-\frac{\delta_1+\delta_2}{E}-1} + \frac{-\delta_1}{E}Cp_5\mu K^{\frac{-\delta_1}{E}-1} + -\frac{\delta_2}{E}DK^{\frac{-\delta_2}{E}-1}.$$

それゆえ傾きが ∞, 0 の 2 つの場合が考えられる.

(i) $|\delta_1| < E$ または $|\delta_2| < E$ ならば, ∞.

(ii) $|\delta_1| > E$ かつ $|\delta_2| > E$ ならば, 0.

よって均衡 K^* の上から下から傾きが ∞, 0 となるという 4 つの場合を考えることによって, 不動点がどの状況のとき生まれているのかを図示し調べる (図 3 参照).

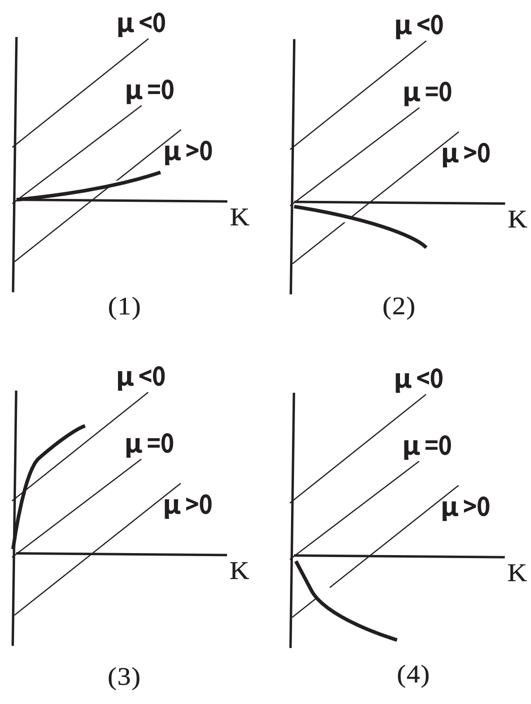

図 3: (4.9) で (1),(2) は傾きが 0, (3),(4) は傾きが ∞ のとき

図 3 から傾きが 0 のときは, K の上, 下からも $\mu > 0$ のとき, 傾きが ∞ のとき, K の上からは $\mu < 0$, 下からは $\mu > 0$ のとき, 不動点を持つことが分かる.

次にこの不動点に関しての安定性を調べる. (4.6) の Jacobi 行列 $J^\mu(y,K)$ は以下のようになる.

$$(4.10)\qquad J^\mu(y,K) = \begin{pmatrix} AK^{\frac{-\delta_1}{E}} & \frac{-\delta_1}{E}AyK^{-\left(\frac{\delta_1}{E}+1\right)} + \frac{-\delta_2}{E}BK^{-\left(\frac{\delta_2}{E}+1\right)} \\ CK^{\frac{-\delta_1}{E}} & \frac{-\delta_1}{E}CyK^{-\left(\frac{\delta_1}{E}+1\right)} + \frac{-\delta_2}{E}DK^{-\left(\frac{\delta_2}{E}+1\right)} \end{pmatrix}.$$

よって, この Jacobi 行列の固有値 $\gamma_{1,2}$ は次のようになる.

$$(4.11)\qquad \gamma_{1,2} = \frac{trJ^\mu}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(trJ^\mu)^2 - 4det(J^\mu)}$$

ただし $detJ^\mu = \frac{-\delta_2}{E}(AD-BC)K^{-\left(\frac{\delta_1+\delta_2}{E}+1\right)}$,

$$\mathrm{tr}\ J^\mu = AK^{\frac{-\delta_1}{E}} + \frac{-\delta_1}{E}CyK^{-\left(\frac{\delta_1}{E}+1\right)} + \frac{-\delta_2}{E}DyK^{-\left(\frac{\delta_2}{E}+1\right)}$$ である.

(4.11) を tr J^μ に代入すると,

$$(4.12)\ \mathrm{tr}\ J^\mu = AK^{\frac{-\delta_1}{E}} + \frac{-\delta_1}{E}CBK^{-\left(\frac{\delta_1+\delta_2}{E}+1\right)} + \frac{-\delta_2}{E}DyK^{-\left(\frac{\delta_2}{E}+1\right)} + \frac{-\delta_1}{E}Cp_5\mu K^{-\left(\frac{\delta_1}{E}+1\right)}$$

となる. ここで十分小さな K について,

det J^μ は,

(i) $|\delta_1+\delta_2| < E$ の場合には任意に大きく,

(ii) $|\delta_1+\delta_2| > E$ の場合には任意に小さく,

tr J^μ は,

(i) $|\delta_1| < E$ または $|\delta_2| < E$ の場合には任意に大きく,

(ii) $|\delta_1| > E$ かつ $|\delta_2| > E$ の場合には任意に小さく,

取ることができる. この事実をまとめると, 固有値について次のことが分かる.

1. $|\delta_1| > E$ かつ $|\delta_2| > E$ ならば, J^μ の固有値は両方とも K を十分小さく取ることで, 任意に小さく取れる.

2. $|\delta_1+\delta_2| > E, |\delta_1| < E$ かつ (または) $|\delta_2| < E$ ならば, J^μ の固有値は K を十分小さく取ることで, 1 つは任意に小さく, 他方は任意に大きく取れる.

3. $|\delta_1+\delta_2| < E$ ならば, J^μ の固有値は両方とも K を十分小さく取ることで, 任意に大きく取れる.

以上をまとめると次の定理となる.

定理 3. (Wiggins [20]) $\mu \neq 0$ で十分小さいとき, (3.1),(3.2),(4.1) において Γ から周期軌道が分岐する. 周期軌道は

i) $|\delta_1| > E$ かつ $|\delta_2| > E$ ならば沈点型,

ii) $|\delta_1+\delta_2| > E, |\delta_1| < E$ かつ (または) $|\delta_2| < E$ ならば鞍点型.

iii) $|\delta_1+\delta_2| < E$ ならば湧点型.

以上のように, 環境の効果の固有値がプラスの場合を考えた. このとき $\delta_1, \delta_2 \ll 1$ であるので, E が同じように十分小さくならなければ, 安定な周期軌道とはならない. つまり

環境の変化が十分大きいときには安定とはならない.

5　おわりに

以上のように, 本稿では共有資源のゲームを進化ゲーム理論の枠組みで定式化することによって, 以下の 2 つの条件を導いた. まず各均衡の安定性, 構造不安定となる条件を導いた. 次にノイズが存在する場合, 構造不安定となった条件の下では, 漸近安定な内点均衡が発生した. さらには近可積分系の議論を導入し, 均衡が純粋戦略と混合戦略という複数均衡が生じる大域的に不安なゲームにノイズを入れると, Arnold 拡散が存在する条件を導出した. また本稿の数理科学としての貢献は, Arnold 拡散が存在する条件の別の証明法, さらには, パーマネンスの考え方を用いず, 漸近安定な内点均衡の導出である. これらを通して, 進化ゲーム理論の方法論の拡張を行った.

例えばこのモデルを現実の経済社会で考える. 具体的にはタクシー市場を取り上げる. ここで環境を需要量とする. タクシー市場にいる企業は 2 つの戦略 (例:低価格化, 高価格化) があるとする. 定理 2 から, 環境の項の固有値が負の場合, 共有地を回避する漸近安定な内点均衡が生まれる. 定理 3 から, 逆に固有値が正の場合, 新規参入者が多い場合は悲劇が起こり, 少ない場合は悲劇を回避するという結論となる. よって需要量が少なくなっているときは, 皆が生き残るために協調をし, 需要量が多くなっているときは, その需要量を奪い合うために競争が激しくなる. 新規参入者が多い場合はどちらかしか生き残ることができず, 少ない場合は皆が生き残ることができるということが推測することができる. 現実の経済社会ではこのような側面があるが, 古典的な理解とは異なった結論を得る[9]. このようなアノマリーを説明する理論として進化ゲーム理論は重要であろう.

以上のようにノイズを入れることによって, 数理モデルとして, 現実をより詳しく表すだけでなく, 今まで説明することができなかった現実社会を説明することができた. また大域不安定なゲームの場合には, 上手にノイズの大きさや内点解をとることによって, コモンズの悲劇を回避することができる. 仮にその条件を満たさない場合であっても, 経済活動, 環境に関する固有値の大きさによってはコモンズの悲劇を回避することができる. 以上のように政府やリーダーなどの第 3 者がコモンズの悲劇を起こさないように, 指導することが重要であるということを推測することができた.

付録

命題 2.　方程式 (2.11), (2.12) において, 各純粋戦略の均衡の局所安定性は次の条件を満たすとき, 各純粋戦略の均衡は漸近安定である. また混合戦略の均衡, 内点均衡は $\dfrac{abcd}{(a+c)(b+d)}$ が負となるときは, リミットサイクルとなり, 正となるときは, 鞍点となる.

$$(y^*, x^*) = (0,0) \text{ のときは, } a<0,\ d<0, \quad (y^*, x^*) = (0,1) \text{ のときは, } c>0,\ d>0,$$
$$(y^*, x^*) = (1,0) \text{ のときは, } a>0,\ b>0, \quad (y^*, x^*) = (1,1) \text{ のときは, } b<0,\ c<0.$$

[9] 松島 [15] では景気変動が企業間競争に及ぼす効果について, サーベイを行っている. そこで古典的な理解として, 好況期 (boom) には企業間競争は緩和され, 不況期 (recession) にはより競争的となることが知られている. しかし鉄道, 自動車産業等においては逆の関係もあることが指摘されている.

証明: (2.11),(2.12) の 2 行 2 列の Jacobi 行列 $J(y,x)$ は,

$$J(y,x)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\dot{y}}{\partial y} & \dfrac{\partial\dot{y}}{\partial x}\\ \dfrac{\partial\dot{x}}{\partial y} & \dfrac{\partial\dot{x}}{\partial x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1-2y)\{a-(a+c)x\} & -(a+c)y(1-y)\\ -(b+d)x(1-x) & (1-2x)\{d-(b+d)y\}\end{pmatrix}$$

となる. この Jacobi 行列に各均衡の値を代入し, 固有値を求めること局所安定性は分かる. まず $(y^*,x^*)=(0,0)$ のときを考える. このときの Jacobi 行列は, $J(0,0)=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}$ となる. このときの固有値は a,d である. よって, $a<0$, $d<0$ となるとき, 均衡点 $(y^*,x^*)=(0,0)$ は漸近安定である. その他の均衡点についても同様の方法を用いることによって容易に分かる.

次に混合戦略の均衡, つまり内点均衡 $(y^*,x^*)=\left(\dfrac{d}{b+d},\dfrac{a}{a+c}\right)$ の局所安定性を考える. このときの Jacobi 行列は,

$$J\left(\frac{d}{b+d},\frac{a}{a+c}\right)=\begin{pmatrix}0 & -\dfrac{bd(a+c)}{(b+d)^2}\\ -\dfrac{ac(b+d)}{(a+c)^2} & 0\end{pmatrix}$$

この Jacobi 行列の固有値は, $\pm\sqrt{\dfrac{abcd}{(a+c)(b+d)}}$ となる. よって $\dfrac{abcd}{(a+c)(b+d)}$ が負のとなるときは, 内点均衡はリミットサイクルとなる. また正となる場合は, 鞍点となる.

(証終)

命題 3. ノイズが存在する Replicator 方程式 (2.13), (2.14) において, $\dfrac{abcd}{(a+c)(b+d)}<0$ のとき, 内点均衡は漸近安定となり, その均衡は存在し, リミットサイクルとなっている.

証明: 今までと同様に固有値を求める. このときの Jacobi 行列は, 次のようになる.

$$J\left(\frac{d}{b+d},\frac{a}{a+c}\right)=\begin{pmatrix}-\delta_1 & -\dfrac{bd(a+c)}{(b+d)^2}\\ -\dfrac{ac(b+d)}{(a+c)^2} & -\delta_2\end{pmatrix}$$

となる. これから, $\delta_1\delta_2-\dfrac{abcd}{(a+c)(b+d)}>0$ のとき漸近安定な内点均衡が存在することが分かる. また $\delta_1\delta_2\approx 0$ であるので, $\dfrac{abcd}{(a+c)(b+d)}<0$ のとき, 固有値の実部は負となり, 内点均衡は漸近安定となる. また 命題 2 からこの内点均衡はリミットサイクルであると分かる.

次に x,y は δ_1,δ_2 の関数であるので, その内点解の存在を考える. そこで 2 つのタイプの新規参入者の比率 $\left(\phi=\dfrac{(1-\delta_2)\delta_1}{(1-\delta_1)\delta_2}\right)$ を考える.

$$\phi=\frac{(1-\delta_2)\delta_1}{(1-\delta_1)\delta_2}=\frac{y(1-y)\{a-(a+c)x\}\left(\dfrac{1}{2}-x\right)}{x(1-x)\{d-(b+d)y\}\left(\dfrac{1}{2}-y\right)}$$

ただし内点解 (y^*, x^*) のときは分母分子が $\frac{0}{0}$ となるので, 解が存在するのかどうか分からない. そこで, $\left(y^* - \frac{\varepsilon}{b+d}, x\right)$, ただし $|\varepsilon| \ll 1$ とする. これを代入すると

$$\phi = \frac{(d-\varepsilon)(b+\varepsilon)\{a-(a+c)x\}(1-2x)}{\varepsilon(b+d)(b-d+2\varepsilon)x(1-x)}$$

となる. この ϕ は, $x = \frac{a \pm \sqrt{ac}}{a-c}$ のとき ϕ は最小値を取る. ただし, ε が十分に小さいので, $\frac{1}{2} < x < \frac{a}{a+c}$, または $\frac{a}{a+c} < x < \frac{1}{2}$ の範囲内で, ほとんどすべての ϕ で解が存在する. (証終)

命題 4. (KAM の定理, Arnold and Avez [2] を変更) ほとんどすべての δ_1, δ_2 に対して, ノイズが存在する不変トーラスでノイズが存在しない場合の不変トーラスに近いものが正の測度で存在する.

証明: $|H^n - H| < \varepsilon$ となる δ_1, δ_2 の値の組が正の測度で存在すればよい. ただし, ε は十分小さい, 正のある値とする. 計算すると,

$$\begin{aligned}|H^n - H| &= \log \frac{y^{-\delta_2 d}(1-y)^{\delta_2 b}\left(\frac{1}{2}-y\right)^{\delta_2}}{x^{-\delta_1 a}(1-x)^{\delta_1 c}\left(\frac{1}{2}-x\right)^{\delta_1}} \\ &= \delta_2 \log\left\{y^{-d}(1-y)^b\left(\frac{1}{2}-y\right)\right\} - \delta_1 \log\left\{x^{-a}(1-x)^c\left(\frac{1}{2}-x\right)\right\}\end{aligned}$$

となる. よって $|H^n - H| < \varepsilon$ となる δ_1, δ_2 の値の組は正の測度で存在する. (証終)

定理 1. 純粋戦略と混合戦略という複数均衡を持つ大域不安定なゲームに, ノイズが存在し, $\frac{abcd}{(a+c)(b+d)} < 0$ を満たすとき, Arnold 拡散が存在する.

証明: 命題 2 ではノイズが存在し, $\frac{abcd}{(a+c)(b+d)} < 0$ のとき, 漸近安定な内点均衡が存在した. よって大域的に不安定なゲームにこの条件を満たす場合, ある点 p で,

$$T_pW^s(y, x, \delta) + T_pW^u(y, x, \delta) = \mathcal{R}^2$$

となる横断面が存在することが分かる.

また命題 4 で KAM の定理が成立することから, ノイズが存在しても, 不変トーラス (torus) が存在する. よって安定多様体 (stable manifold) $W^s(y, x, \delta_1, \delta_2)$ と 不安定多様体 (unstable manifold) $W^u(y, x, \delta_1, \delta_2)$ が点 p で交わる点が稠密に存在する. よってそれをつなぐ遷移チェーン (transition chain) が存在する.(Arnold [1], Theorem 2) よってそれに沿って不変トーラスの近傍を通過するような軌道が存在する (Arnold [1], Theorem 3). (証終)

命題 5. 各純粋戦略の均衡の局所安定性は次の条件を満たすとき, 各純粋戦略の均衡は漸近安定である. また混合戦略の均衡, 内点解は漸近安定ではない.

$$\begin{aligned}(y^*, x^*, K^*) &= (0, 0, K^*) \text{ のときは,} \quad a < 0,\ d < 0, E < 0, \\ &= (0, 1, K^*) \text{ のときは,} \quad c > 0,\ d > 0, E < 0, \\ &= (1, 0, K^*) \text{ のときは,} \quad a > 0,\ b > 0, E < 0,\end{aligned}$$

$= (1, 1, K^*)$ のときは, $\quad b < 0,\ c < 0, E < 0.$

ただし $E = G'(K) - H_L \dfrac{\partial L}{\partial K} - H_K$ とする.

証明: (2.11),(2.12),(3.4) の 3 行 3 列の Jacobi 行列 $J(y, x, K)$ は,

$$J(y,x,K) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \dot{y}}{\partial y} & \dfrac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \dfrac{\partial \dot{y}}{\partial K} \\ \dfrac{\partial \dot{x}}{\partial y} & \dfrac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \dfrac{\partial \dot{x}}{\partial K} \\ \dfrac{\partial \dot{K}}{\partial y} & \dfrac{\partial \dot{K}}{\partial x} & \dfrac{\partial \dot{K}}{\partial K} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (1-2y)\{a-(a+c)x\} & -(a+c)y(1-y) & y(1-y)\dfrac{\partial\{a-(a+c)x\}}{\partial K} \\ -(b+d)x(1-x) & (1-2x)\{d-(b+d)y\} & x(1-x)\dfrac{\partial\{d-(b+d)y\}}{\partial K} \\ -H_L\dfrac{\partial L}{\partial y} & -H_L\dfrac{\partial L}{\partial x} & G'(K) - H_L\dfrac{\partial L}{\partial K} - H_K \end{pmatrix} \tag{A.1}$$

となる. これから, 各均衡の値を代入し, 固有値を求めることで分かる. まず $(y^*, x^*, K^*) = (0, 0, K^*)$ のときを考える. このときの Jacobi 行列は, $J(0,0) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}$ となる. このときの固有値は a, d, E である. よって, $a < 0,\ d < 0,\ E < 0$ となるとき, 均衡点 $(y^*, x^*, K^*) = (0, 0, K^*)$ は漸近安定である. その他の均衡点についても同様の方法を用いることによって容易に分かる.

次に混合戦略の均衡, つまり内点均衡 $(y^*, x^*, K^*) = \left(\dfrac{d}{b+d}, \dfrac{a}{a+c}, K^*\right)$ の局所安定性を考える. このときの Jacobi 行列は,

$$J\left(\frac{d}{b+d}, \frac{a}{a+c}, K^*\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{bd(a+c)}{(b+d)^2} & 0 \\ -\dfrac{ac(b+d)}{(a+c)^2} & 0 & 0 \\ -H_L\dfrac{\partial L}{\partial y} & -H_L\dfrac{\partial L}{\partial x} & E \end{pmatrix}$$

この Jacobi 行列の固有値は, 0(重解), E となる. よってこの内点均衡は漸近安定ではない. (証終)

命題 6. ノイズが存在する場合, Replicator 方程式 (2.13), (2.14) は $E < 0$ のとき, 漸近安定な内点均衡が存在する.

証明: 今までと同様に固有値を求める. このときの Jacobi 行列は, 次のようになる.

$$J\left(\frac{d}{b+d}, \frac{a}{a+c}, K^*\right) = \begin{pmatrix} -\delta_1 & -\dfrac{bd(a+c)}{(b+d)^2} & 0 \\ -\dfrac{ac(b+d)}{(a+c)^2} & -\delta_2 & 0 \\ -H_L\dfrac{\partial L}{\partial y} & -H_L\dfrac{\partial L}{\partial x} & E \end{pmatrix}$$

となる. よって $E < 0$ のとき内点均衡は漸近安定となる.

存在証明は命題 3 の証明と同様にでき, 存在する. (証終)

定理 2. 複数均衡持つ大域不安定なゲームに, ノイズが存在し, 環境の項の固有値 $E < 0$ 場合, Arnold 拡散が存在する.

証明: 命題 3 で, ノイズが存在する場合 $E < 0$ のとき, 漸近安定な内点均衡が存在した. よって $E < 0$ のとき, 大域的に不安定なゲームにノイズが存在する場合, ある点 p で,

$$T_pW^s(y,x,\delta) + T_pW^u(y,x,\delta) = \mathcal{R}^2$$

となる横断面が存在することが分かる. あとは定理 1 と同様の論理で証明することができる. (証終)

参考文献

[1] Arnol'd,V.I.: "Instability of dynamical systems with several degrees of freedom," *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, Vol.**156** (1964), pp.9-12. English transl. in *Soviet Math. Doklady.* Vol.**5** (1964), pp.581-585.

[2] Arnol'd,V.I. and Avez, A. : *Ergodic Problems of Classical Mechanics*, Benjamin, New York, 1968. 吉田耕作 (訳)『古典力学のエルゴード問題』吉岡書店, 1972 年.

[3] 浅子和美, 国則守生: 「コモンズの経済理論」宇沢弘文, 茂木愛一郎 (編著)『社会的共通資本』東京大学出版会, pp.71-100, 1994 年.

[4] Dasgupta,Partha and Geoffrey,Heal: *Economic theory and exhaustible resources*, Cambridge: Cambridge University Press,1979.

[5] Fudenberg, Drew and Levine, David, K.: *The Theory of Learning in Games*, MIT Press, 1998.

[6] Gale,John, Binmore, Kenneth G. and Samuelson, Larry: "Learning To Be Imperfect: The Ultimatum Game," *Games and Economic Behavior*, Vol.**8** (1995),pp.56-90.

[7] Hardin,Garrett: "The Tragedy of the Commons," *Science*, Vol.**162** (13 December,1968), pp.1243-1248. 桜井徹 (訳)『環境の倫理 下』晃洋書房, pp.445-470, 1993 年.

[8] Hirsch, Morris W. and Smale, Stephen: *Differential Equations Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, New York,1974. 田村一郎, 水谷忠良, 新井紀久子 (訳)『力学系入門』岩波書店, 1976 年.

[9] Hofbauer,Josef: "Evolutionary dynamics for bimatrix games: A Hamiltonian system?," *Journal of Mathematical Biology*, Vol. **34** (1996), pp.675-688.

[10] Holmes,Philip J. and Marsden,Jerrold E.: "Melnikov's method and Arnold diffusion for perturbations of integrable Hamiltonian systems," *Journal of Mathematical Physics*,Vol.**23** (1982), pp.669-675.

[11] Jansen, Wolfgang: "A permanence theorem for replicator and Lotka-Volterra systems," *Journal of Mathematical Biology*, Vol.**25**(1987), pp. 411-422.

[12] 吉川満: 「非対称 2 人ゲームの大域的な分析とノイズの役割 – 最終提案ゲームを例にとって –」『関西学院 経済学研究』, 第 **36** 巻 (2005), pp.17-31.

[13] 吉川満: 「共有資源のゲームにおけるノイズの効果」『関西学院 経済学研究』, 第 **37** 巻 (2006), pp.305-324.

[14] 吉川満: 「非対称 2 人ゲームにおける漸近安定な均衡の発生とその進化」『進化経済学論集』第 **11** 号 (2007), pp.450-460.

[15] 松島斉: 「過去, 現在, 未来: 繰り返しゲームと経済学」岩井克人, 伊藤元重 (編著)『現代の経済理論』東京大学出版会, pp. 57-102, 1994 年.

[16] Melnikov,V.K.: "On the stability of the center for time-periodic perturbations," *Transactions of Moscow Mathematical Society*, Vol. **12**(1963), pp.1-56.

[17] Sethi,Rajiv and Somanathan,E.: "The Evolution of Social Norms in Common Property Resource Use," *American Economic Review*,Vol.**86**(1996), pp.766-788.

[18] 宇沢弘文: 「コモンズの理論」宇沢弘文, 国則守生 (編著)『制度資本の経済学』東京大学出版会, pp.185-229, 1995 年.

[19] Weibull,Jörgen W.: *Evolutionary Game Theory*, MIT Press,1995. 大和瀬達二 (監訳)『進化ゲームの理論』オフィス カノウチ, 1998 年.

[20] Wiggins,Stephen: *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springr-Verlag,1990. 丹羽敏雄 (監訳)『非線形の力学系とカオス』シュプリンガー・フェアラーク東京, 1999 年.