進化経済学論集第１３集　2008 年 3 月 28-29 日
岡山大会於岡山大学

進化ゲーム理論における共進化と多様性
— 確率的環境の場合 —

関西学院大学大学院 経済学研究科　吉 川　満[1)]

要旨

確率的環境変動, 利得が確率的に変化するゲームを動学の視点で分析した. このようなゲームにおいて静学の場合は, Harsanyi [8] の結果 (混合戦略が ESS) と, Selten [23] の結果 (純粋戦略が ESS) は矛盾することが知られている. これを統一的に進化ゲーム理論の枠組みで考え, 整理し, その差異を明らかにした. その結果情報の非対称と戦略の多様性との間に関連があることが分かった. さらにはこのゲームを Global ゲームに応用し, 同様の結論を得た.

JEL: C73
キーワード: 進化ゲーム理論, 共進化, 多様性, 確率的環境変動, 両賭け戦略, グローバル・ゲーム
Key words: Evolutionary Game Theory, Coevolution, Diversity, Stochastic Environment, Bet-Hedging Strategy, Global Game

1　はじめに

Replicator 方程式を用いた進化ゲーム理論において, 共進化と多様性した研究に Metcalfe [18] やそれを解説した井上 [12] がある. これらは産業組織論の文脈で「多様性が変化を促進する」という結論を得ている. そこで本稿では, 確率的に環境変動がある場合の戦略の多様性について考察する.[2)] 特にここでは確率的環境変動とは利得に小さな確率的な変動がある場合とする.

この種の問題を考えた先行研究として, Harsanyi [8] がある.[3)] この研究は静学の枠組みで, 混合戦略均衡が各プレイヤーが私的な情報に基づいて, 最適反応として特徴づけられる純粋戦略を選ぶ状態の近似になっていることを示した. つまりすべての混合戦略は近似的に強均衡 (strict equilibrium)[4)]であり, 進化的に安定な戦略である. またこのような性質

[1)] E-mail:mitsurukikkawa@hotmail.co.jp, URL:http://kikkawa.cyber-ninja.jp/index.htm

[2)] 数理生物学 [13, 14] では, このように環境が変動する場合において両賭け (bet-hedging) 戦略を行ういうことが知られている. これは環境が変動する場合, 生物種が絶滅しないために最適な戦略のみいう均一な戦略とはならず, 複数な戦略が混在するという, 多様な戦略が見られる. このようなことが見られる理由として, 適応度関数の形状によるためにである. 適応度関数が算術平均 (相加平均) の場合はそのようなことは見られず, 幾何平均 (相乗平均) の場合見られる. 経済学では von Neumann-Morgenstern 期待効用関数を用いているので, この議論をそのまま当てはめると, 両賭け戦略は見られなくなる.

[3)] これを動学に拡張した研究として, フィクティシャス プレイ (fictitious play)[5, 6, 4] や最適応答反応 (best response dynamics) [9, 22] においても Harsanyi [8] の示したことと同様の趣旨が成り立つのかを調べている.

[4)] **定義**:　Nash 均衡 $x \in \Theta$ が強均衡とは, 各戦略 x_i が x に対する最適反応が一意のときを言う. つまり $\tilde{\beta} = \{x\}$ という関係が成り立つ. ただしここで Θ を戦略空間, $\tilde{\beta}$ を混合戦略の最適応答反応対応とする.

を ε^* の下で**接近可能**(approachable) であると言われている．つまり環境変動がある場合, 多様な戦略があり, その状態が ESS である．

一方で Selten [23] は役割がある (role-completed) ゲーム[5)]において, 元々役割がないゲームにおいて強均衡のみが進化的に安定であるということを示した．よって混合戦略均衡はその定義上, 均衡で同じ利得をあげる戦略が複数存在するので, 強均衡ではない．そもそもこのゲームはどの役割となるのか分からず, その意味で利得が特定化できないために, Harsanyi [8] と関連があると考えられる．そのため Harsanyi [8] の議論と矛盾が生じ, 戦略の多様性は見られないことになる．

そこでこの矛盾を考察した Binmore and Samuelson [2] は混合戦略の近似は高い参入障壁を持ち, 利得の摂動が相対的に大きく, 役割の認識が相対的に不正確である場合, Harsanyi の結果と整合的であり, 混合戦略均衡は ESS である．逆に利得の摂動が小さく, 役割の認識が正確である場合, Selten の結果と整合的であり, 混合戦略均衡は ESS ではない, ということを示している．つまり役割の認識が不正確の場合, 戦略の多様性があり, そうではない場合, 多様性は失われる．

また Huck and Jörg [11] では, Harsanyi 型のゲームを Indirect Evolutionary Approach とし, Selten 型のゲームを Direct Evolutionary Approach とした場合, 最後通告ゲーム (The Ultimatum game) においても Indirect, Direct Approach による均衡が異なる．その要因として前者は環境変動がある中で利得を最適化し, Nash 均衡を求めているのに対して, 後者は特定化された行動の期待利得を計算し, Nash 均衡を求めている．そのために前者と後者のゲームの構造が異なるとしている．

このように確率的環境変動下ではどの戦略の組が Nash 均衡となるのかということは容易なことではないということが分かる．そこで本稿ではまず Harsanyi 型のゲームを進化ゲーム理論で主に使用されている Replicator 方程式を用いて動学の枠組みに拡張し, 確率的環境変動がある場合を考察する．よって利得 g_i の値が環境の不規則な変動によって, その平均値 $\bar{g}$ の近傍で時間的にランダムな変化をするものとする．つまり次の方程式系を考察する．

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = x_i(t)\big(g_i(t) - \bar{g}(t)\big), \quad g_i(t) = g_i + \zeta(t)$$

次に Selten 型のゲームでは, 複数のグループがある場合と解釈し直し, この場合のゲームを進化ゲーム理論を用いて定式化し, 分析した．そこでは進化生態学において **Price の公式**と呼ばれている公式が重要な役割を担っていることが分かる．

このように静学の枠組みでは矛盾したこの 2 つのタイプの研究 (Harsanyi 型, Selten 型) を同一の手法, Replicator 方程式を用いて議論した．すると次のことが分かった．環境変動の影響を受けるのは, 混合戦略, 内点解のみであり, これらは接近可能である．この場合対称 2 人ゲームの場合安定性が変化するが, 非対称 2 人ゲームの場合変化しなかった．次に

[5)]Maynard Smith [17] に従えば, 例えば動物が巣の場所を争う状況であるなら, 既にそこに住んでいる動物が行プレーヤー, その場所を奪おうとする動物が列プレーヤーというように, プレーヤー間で互いに確認である何らかの差異をシグナルとしてお互いの役割を特定化することが十分に可能である．また出入り口で, 出て行く人と入ろうとする人がぶつかりそうになった場合, それぞれの戦略が「そのまま直進」と「相手の通過を待つ」であるならば, 出て行く人が「そのまま直進」し, 入る人が「相手の通過を待つ」という戦略をとるという慣習は, この役割に依存した戦略が実際に採用されている一例である．

役割のあるゲームでは, 当初から役割を与えられたプレイヤーがおり, これをグループ構造のあるゲームと解釈すると, グループ内の変動は Replicator 方程式に従う. そのため役割があるタカ・ハトゲームでは純粋戦略が ESS となる. さらにはこのグループ構造のあるゲームを Global ゲームへ応用した. ここで観測のノイズとは選り好みの度合とした. その結果 ESS に関して, Global ゲームから得られる同様の結論を得た. 以上のように, 確率的環境変動がある場合のゲームを Replicator 方程式を用い, 戦略の多様性の問題を考察し, 情報の非対称性と関連があるという結論を得た.

この論文は次のように構成されている. 第 2 節では, 共進化と多様性について基本事項をまとめる. 第 3 節では, 静学の場合の環境変動がある場合を取り上げる. 第 4 節では, 動学の場合の環境変動がある場合を取り上げる. 第 5 節では, 戦略が 2 つの場合を取り上げる. 第 6 節では, この手法を Global ゲームへ応用する. 第 7 節では, 結論を述べる.

2 基本事項

この節では進化ゲーム理論の立場で共進化と多様性を議論するために基本的な事項をまとめる. まず進化ゲーム理論において基本的な方程式である Replicator 方程式を導出する.[6] ここでは次のような状況を想定している. ある場所に 2 人のプレイヤーがおり, 前期とは独立に N 個の戦略を用いる場合, 例えば市場に平均的な売り手と平均的な買い手のゲームを考える. あるいは大人数のプレイヤーがおり, これらが N 個の戦略を持って, 1 対 1 でランダムにマッチングする場合を考える.

ここで戦略 i を採用する確率, あるいは戦略 i を採用している人の全体に占めるシェアを $x_i(t) = \dfrac{p_i(t)}{P(t)}$, ただし $P(t)$ を全体の人口[7], $p_i(t)$ を戦略 i を採用している人口とする. 次にこの $x_i(t)$ の変動を考えると, $x_i(t+\Delta t) = \dfrac{p_i(t+\Delta t)}{P(t+\Delta t)}$ となる. $x_i(t+\Delta t) = \dfrac{x_i(t+\Delta t)X(t+\Delta)}{X(t+\Delta)} = \dfrac{(1+g_i)x_i(t)X(t)}{X(t+\Delta t)} = \Big[\dfrac{1+g_i}{1+\bar{g}}\Big]x_i(t), \quad \bar{g} = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i g_i.$

$$x_i(t+\Delta) - x_i(t) = x_i(t)\Big[\frac{1+g_i}{1+\bar{g}} - 1\Big] = x_i\Big[\frac{1+g_i-1-\bar{g}}{1+\bar{g}}\Big] = x_i\Big[\frac{g_i-\bar{g}}{1+\bar{g}}\Big].$$

ここで $\Delta t \to 0$ とすると, 次が得られる.

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = x_i(g_i - \bar{g}). \tag{2.1}$$

これが **Replicator 方程式**である. この Replicator 方程式はある戦略 i を取ったときの自分の利得が平均利得よりも大きい場合には, その戦略を取る確率が高くなり, またゲームをしている周りのプレイヤーがその戦略を取る確率が高いほどその増加率も高くなる (外部性 (externality) の存在) ということを示している.

[6] Replicator 方程式の導出法としては Lotka-Volterra 方程式から導出する方法もある. この方法は Weibull [25], Hofbauer and Sigmund [10] を参照されたい.

[7] 有限であるが, 大数の法則が成り立つ程度の大きさとする. 仮に人口が無限であると, 確率やゲーム自体を定義することが難しくなるからである. その折衷案として, 無限に近い有限の数としている.

次に均衡について定義する．進化ゲーム理論は動学であるので, Nash 均衡とは異なり, 進化的に安定な戦略 (ESS) という概念が使われている．特に Replicator 方程式の平衡状態は, Nash 均衡である．

定義 1. 戦略 $q_i \in Q_i$ が**進化的に安定な戦略 (Evolutionary Stable Strategy: ESS)** であるとは, どのような戦略 $q_j \neq q_i$ に対しても, ある $\bar{\epsilon}_q \in (0,1)$ が存在し, すべての $\varepsilon \in (0, \bar{\epsilon}_q)$ について次の不等式が成り立つことをいう．

$$F\big[q_i, \varepsilon q_j + (1-\varepsilon)q_i\big] > F\big[q_j, \varepsilon q_j + (1-\varepsilon)q_i\big]. \tag{2.2}$$

ただし Q_i をプレイヤー i の戦略の集合, $F[\cdot]$ を効用関数とする．

またこの ESS を特徴づけると, 次のような性質をもつ．

命題 1. 定義 1 で定義した進化的安定な戦略は以下の条件と同値である．

$$F(q_j, q_i) \leq F(q_i, q_i), \qquad \forall q_j, \tag{2.3}$$

$$F(q_j, q_i) = F(q_i, q_i) \Rightarrow F(q_j, q_j) < F(q_i, q_j), \qquad \forall q_j \neq q_i. \tag{2.4}$$

証明: 略．進化ゲーム理論の代表的な本, 例えば Weibull [25] などを参照されたい．

この命題からも分かるように, (2.3) は Nash 均衡の条件であり, (2.4) は漸近安定性の条件である．よって ESS は漸近安定性を持つので, 利得に小さな変動がある場合であっても, 影響がないということが容易に推測される．

次に先ほど導出した Replicator 方程式を用いて, **Fisher の第 1 定理**(Fisher's fundamental theorem of natural selection): 「ある生物種の平均的環境適応能力の上昇率は, 各個体の適応能力の分散に等しい」[8]を導く．これを進化ゲーム理論の枠組みで書き換えると, 次の命題となる．

命題 2.(Losert and Akin [16], Metcalfe [18]) 平均利得の上昇率は, 各プレイヤーの戦略の分散に等しい．また平均利得は単調増加する．

証明: 付録参照．

この命題から戦略について戦略の多様性があればあるほど, 平均利得は上昇する．つまり「多様性が変化を促進する」と結論づけている．[18, 12] そもそも Replicator 方程式は Nash 均衡への収束していく動学プロセスを示している．そのため当初戦略が不均一で, 多様性がある場合, 時間とともに戦略が徐々に Nash 均衡へ収束, 均一化していくため, 当初は平均利得の上昇率が高くなるためである．

[8]本によっては「いくつかの状況において, 進化的選択は, 時間を通じて平均集団適応度を単調に増加させる.」の方を掲載している. [25]

3　環境変動がある場合 (静学)

この節では環境変動がある場合を取り上げる．この場合の代表的な研究として, Harsanyi [8], Selten [23] を取り上げる．

3.1　Harsanyi [8]

枠組みは Harsanyi [8] に従い, 定式化する．$G = \langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ を有限戦略形ゲーム, ここで N をプレイヤーの集合, A_i を戦略の集合, u_i を効用関数とする．また $\varepsilon = \big(\varepsilon_i(a)\big)_{i \in N, a \in A}$ を範囲 $[-1, 1]$ である確率変数の族とする．ただし $\varepsilon = \big(\varepsilon_i(a)\big)_{i \in N, a \in A}$ は連続的な微分可能密度関数であり, 完全連続分布関数, 確率ベクトル $(\varepsilon_i)_{i \in N}$ は独立であるとする．

摂動ゲーム (perturbed games), 微小な確率的な変動 $\varepsilon_i(a)$ の下で, 戦略 a を採用している各プレイヤー i の利得, ε_i の各プレイヤー i の実現値 $\big(\varepsilon_i(a)\big)_{a \in A}$ を知っているが, 他のプレイヤーの確率変数の実現値は知らないようなゲームを考える．つまり ε の実現値の全ての可能な値の集合である自然の状態の集合におけるベイジアンゲーム $G(\varepsilon)$, 各プレイヤーの (共通の) 事後信念は ε によって特定化される確率分布で, ゲームの相手に実現値 $\big(\varepsilon_i(a)\big)_{a \in A}$ のみを知らせるプレイヤー i のシグナル関数, そして戦略 a を採用し, 状態 ε の時のプレイヤー i の利得は $u_i(a) + \varepsilon_i(a)$ であるようなゲームを考える．

定理 1.　(Harsanyi [8])　プレイヤーの集合 N, 戦略の空間 A_i とする．利得は $\big\{u_i(s)\big\}_{i \in N, a \in A}$ とし, $\Theta_i = [-1, 1]^{\#A}$ 上で定義できる確率 p_i はすべて独立で, 2 回微分可能分布とし, 任意の利得 u_i は $\varepsilon \to 0$ とすると, 摂動ゲームにおいての純粋戦略の均衡時の利得 $\tilde{u}_i$ と一致する．

この定理は摂動ゲームの Nash 均衡は極限ではすべての混合戦略の「純粋化」として使用可能であることを言っている．またこの定理は Nash 均衡が混合戦略の場合のときの解釈について考察されるときよく取り上げられる.[9] このときの解釈としては, 混合戦略均衡が各プレイヤーが私的な情報に基づいて, 最適反応として特徴づけられる純粋戦略を選ぶ状況の近似となっている．各人の意識としては純粋戦略を選択していても, 私的ノイズの実現値を観察できない分析者や, 他のプレイヤーにとって各プレイヤーはあたかも混合戦略をとっているかのように見える．次にこの純粋化理論 (Purification Theorem) についての例を挙げる．

例　(Osborne and Rubinstein [20])　各プレイヤー i が 2 つの純粋戦略, a_i, b_i を持つ 2 人ゲームを考える．δ_i, $i = 1, 2$ は独立な確率変数で, それぞれ $[-1, 1]$ 上に一様に分布しているとする．また確率変数 $\varepsilon_i(a)$, $i = 1, 2$, $a \in A$ は次の性質を持つ．$\varepsilon_1(a_1, x) - \varepsilon_1(b_1, x) = \delta_1$, $x = a_2, b_2$, そして $\varepsilon_2(x, a_2) - \varepsilon_2(x, b_2) = \delta_2$, $x = a_1, b_1$.

(1) 男女の争い (battle of the sexes)[10]　次にあるような利得表の男女の争いにおいて, 全ての Nash 均衡は ε の下で, 到達可能である．

[9] 例えば Osborne and Rubinstein [20], 荒木 [1] などが挙げられる．
[10] 男女の争いにおける Nash 均衡は純粋戦略の組 (a_1, a_2),(b_1, b_2) の 2 つと, 混合戦略の均衡が存在する．

I ＼ II	a_2	b_2
a_1	$2+\gamma\delta_1, 1+\gamma\delta_2$	$\gamma\delta_1, 0$
b_1	$0, \gamma\delta_2$	$1, 2$

証明: 純粋戦略均衡は明らかに到達可能である．ここでは混合戦略を考える．

p_i,$i=1,2$ をベイジアンゲーム $G(\gamma\varepsilon)$ において, プレイヤー i のタイプが行動 a_i を選ぶ確率とする．このとき次の条件が成り立つとき, プレイヤー 1 が行動 a_1 を選択することが最適となる．よって

$$(2+\gamma\delta_1)p_2 \geq (1-\gamma\delta_1)(1-p_2) \quad \Rightarrow \quad \delta_1 \geq (1-3p_2)/\gamma.$$

を得る．δ_1 が下限 $(1-3p_2)/\gamma$ に等しくなるとき, δ_1 の定義域 $-1 \leq \delta_1 \leq 1$ より, $\frac{1}{3}(1-\gamma) \leq p_2 \leq \frac{1}{3}(1+\gamma)$ を得る．よって $p_1 = \frac{1}{2}\bigl(1-(1-3p_2)/\gamma\bigr)$ となる．またプレイヤー 2 が行動 a_2 を選択する場合について考えると, 同様の方法から, $p_2 = \frac{1}{2}\bigl(1-(2-3p_2)/\gamma\bigr)$ を得る．p_1, p_2 に関する方程式から, それぞれについて解くと, $p_1 = (2+\gamma)/(3+2\gamma)$, $p_2 = (1+\gamma)/(3+2\gamma)$ を得, これらは条件を満たす．$\gamma \to 0$ とすると, $(p_1, p_2) \to (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ となるので, 混合戦略均衡は到達可能である．

□

(2) 次の利得表にあるように $u_i(a_1, a_2) = 1$, $i = 1, 2$ であり, 他の全ての利得は 0 であるゲームにおいて, 純粋戦略の Nash 均衡 (a_1, a_2) のみが ε の下で, 到達可能である．

I ＼ II	a_2	b_2
a_1	$1+\gamma\delta_1, 1+\gamma\delta_2$	$\gamma\delta_1, 0$
b_1	$0, \gamma\delta_2$	$0, 0$

証明: $\delta_j > 0$ となるときはいつでも, $\frac{1}{2}$ の確率で行動 a_j は行動 b_j を支配する．よって $p_j \geq \frac{1}{2}$.

今行動 a_i に対するプレイヤー i の利得を $p_j(1+\gamma\delta_i) + (1-p_j)\gamma\delta_i = p_j + \gamma\delta_i$ とする．またこの利得は $p_j \geq \frac{1}{2}$ とし, $\gamma < \frac{1}{2}$ のとき, すべての δ_i で正である．このように $\gamma < \frac{1}{2}$ でプレイヤー i のすべてのタイプは行動 a_i を選択する

ベイジアンゲーム $G(\gamma\varepsilon)$ は各プレイヤー i のすべてのタイプは純粋戦略 a_i を選ぶという唯一の Nash 均衡を持つ．このように元のゲームにおける純粋戦略均衡 (a_1, a_2) のみが, 到達可能である．

□

以上から静学の枠組みで, 環境に変動がある場合, 両賭け戦略が見られ, その変動が小さくなると, 変動がない場合と一致するという純粋化理論について考察した．

3.2 Selten [23]

Selten [23] はプレイヤーが役割依存型戦略をとることができる場合には, 繰り返される元のゲームの強均衡のみが進化的に安定であることを示した (命題 5).

ここで言う役割のあるゲームとは, 自分自身の役割に応じて, 戦略を変更するゲームを指す. 今まではプレイヤーが戦略 $x \in \Delta$(戦略の集合) を任意の戦略 $y \in \Delta$ に対して用いるとき, プレイヤーがプレイヤーの役割 1(行プレイヤー) とプレイヤーの役割 2(列プレイヤー) のどちらかに割り当てられるかに関わらず, その利得は同じ $u(x, y)$ であった. しかしながら, もし集団の他のプレイヤーがその戦略をプレイヤーの役割に応じて変えるならば, 戦略 $x \in \Delta$ はふたつのプレイヤーの役割に応じて異なる利得をあげる可能性がある. すなわちもし対戦相手が, 自らのプレイヤーの役割が 1 である (したがって相手は役割 2) と分かれば, $y^1 \in \Delta$ を用い, プレイヤーの役割が 2 である (相手は役割 1) と分かれば, $y^2 \in \Delta$ を用いる場合, 戦略 $x \in \Delta$ はプレイヤーの役割 1 でそれが用いられる利得 $u(x, y^2)$ をあげ, プレイヤーの役割 2 でそれが用いられる利得 $u(x, y^1)$ をあげる.

ここでは役割のあるゲームの例として, 代表的なタカ・ハトゲームを挙げる.

例：タカ・ハトゲーム (Hawk-Dove Game)

2 人のプレイヤーは総額 V の資産を争っている. 両者との平和的なハト戦略をとった場合には両者ともに $\frac{V}{2}$ を得る. しかし両者とも攻撃的なタカ戦略を取った場合には, 争いの結果, ともに費用 C を負担し, 得られる額は $\frac{V}{2} - C$ となる. そして一方がタカ戦略を, 他方がハト戦略をとった場合には, タカ戦略をとったプレイヤーが全資産を獲得する. もし C と V が等しいならば, このゲームにはハトとタカ, タカとハトという 2 つの純粋戦略均衡と, 各プレイヤーがハト戦略とタカ戦略を確率 $\frac{1}{2}$ でプレイする混合戦略の均衡の合計 3 つの Nash 均衡が存在する.

I ＼ II	Dove	Hawk
Dove	$\frac{V}{2}, \frac{V}{2}$	$0, V$
Hawk	$V, 0$	$\frac{V}{2} - C, \frac{V}{2} - C$

タカ・ハトゲームの利得表

このゲームの ESS は混合戦略のみである.[11] またこの均衡の局所安定性はリミットサイクルであり, 構造不安定な均衡点である.[12]

例: 役割完備化タカ・ハトゲーム (Role-completed Hawk-Dove Game)

いま列プレイヤーならばハト (D), 行プレイヤーならばタカ (H) という戦略を DH で表記するならば, 4 つの戦略は DD, HH, DH, HD と表すことができる. 一度各プレイヤーにそれぞれの役割に依存した戦略をとることが許されると, タカ・ハトゲームは次の利得表で表される役割完備型タカ・ハトゲームとなる. この利得表はプレイヤー 1 と 2 がともに,

[11] 2 つの純粋戦略均衡は ESS であるとすると, すべてのプレイヤーがタカ (ハト) 戦略の状態に, ハト (タカ) 戦略の小集団が侵入すると侵入した少数派タイプの方が高い期待利得を得ることになるので, 定義に反するからである.

[12] 対称 2 人ゲームの安定性は, Potential 関数を導入すれば容易である. 利得行列が $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ である最も単純な対称 2 人ゲームの Replicator 方程式は, $\dot{x} = x(1-x)\{(a+b)x - b\}$ であった. これを不定積分し, 符号を変えると, 次の関数を得る.

$$U(x) = \frac{a+b}{4}x^4 - \frac{a+2b}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + C.$$

ただし C は積分定数とする. これからタカ・ハト型 $(a, b < 0)$ のときは, この Potential 関数は混合戦略 (内点解) を頂点とする, 単峰型の関数である. 利得 a, b に摂動を加えると, 関数の形状が変化するので, 局所不安定である. 特に摂動が大きい場合, 内点解で極値を失ってしまう.

それぞれ2分の1の確率で行プレイヤー, 列プレイヤーとしてタカ・ハトゲームをプレイしたときの期待利得であって, 各プレイヤーが行プレイヤー, 列プレイヤーとしてプレイした場合の利得ではないことに注意されたい.

I＼II	DD	DH	HD	HH
DD	$\frac{V}{2},\frac{V}{2}$	$\frac{V}{4},\frac{3V}{4}$	$\frac{3V}{4},\frac{V}{4}$	$0,V$
DH	$\frac{3V}{4},\frac{V}{4}$	$\frac{V}{2},\frac{V}{2}$	$\frac{V-C}{2},\frac{V-C}{2}$	$\frac{V}{4}-\frac{C}{2},\frac{3V}{4}-C$
HD	$\frac{V}{4},\frac{3V}{4}$	$\frac{V-C}{2},\frac{V-C}{2}$	$\frac{V}{2},\frac{V}{2}$	$\frac{V}{4}-\frac{C}{2},\frac{3V}{4}-C$
HH	$V,0$	$\frac{3V}{4}-C,\frac{V}{4}-\frac{C}{2}$	$\frac{3V}{4}-C,\frac{V}{4}-\frac{C}{2}$	$\frac{V}{2}-C,\frac{V}{2}-C$

役割完備化タカ・ハトゲームの利得表

このゲームのESSは全プレイヤーがHDタイプからのみある状態と全プレイヤーがDHタイプからのみある状態であり, 混合戦略はESSとはならない. よって元のゲームであるタカ・ハトゲームで, ESSであった混合戦略均衡が不安定になり, ESSではなかった2つの純粋戦略均衡が安定化した. Selten [23] はさらにこの結果を一般化し, 次の結論を得た.

命題 3. (Selten [23]) 役割があるゲームにおいて戦略 $\bar{x}$ が進化的に安定であるための必要十分条件は, $\bar{x}$ が元のゲームにおいて強Nash均衡となることである.

以上からも分かるように, 利得が確率的に変動するHarsanyi [8] では混合戦略がESSであり, 相手のタイプが分からない役割があるSelten [23] のゲームでは純粋戦略がESSとなり, これらの結論に矛盾が生じていることが分かる.

4 環境変動がある場合 (動学)

4.1 動学版 Harsanyi [8]

第3節では静学の枠組みによる環境変動の考察であった. この節では動学, Replicator方程式を用いて, 先ほど取り上げた2つのタイプのゲームを分析する. まずHarsanyi型の研究をReplicator方程式を用いて, 動学に拡張する. ここでは利得が確率的環境変動によって変化するとする. 戦略 i を採用した時の利得 $g_i(t)$ の値は不規則な変動によって, 平均 g_i の近傍で時間的にランダムな変化するとする. そのためReplicator方程式は次のように置くことになる.

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=x_i(t)\big(g_i(t)-\bar{g}(t)\big),\qquad g_i(t)=g_i+\zeta(t) \tag{4.1}$$

ただし $\zeta(t)$ は平均値 g_i の近傍でのランダムな時間的変化を示す関数とする. このとき平衡状態では次の命題が成り立つ.

命題 4. 戦略の分布 (x) は次のような対数正規分布に従う.

$$P(x,t)dx=(2\pi\sigma^2 t)^{-1/2}\exp\Big[-\frac{\big(\log x-\log x^*(t)\big)^2}{2\sigma^2 t}\Big]\frac{dx}{x}.$$

証明: 付録参照.

この命題から戦略の分布が分かった. よってこの分布は対数正規分布に従うために, 分散 σ によって, 多様性が見られる場合と, 見られない場合があることが分かる. つまり動学の場合分散 σ の値の下で接近可能であり, 純粋化理論が成り立つことが分かる.

4.2 動学版 Selten [23]

Selten [23] の議論を動学で分析するために, 当初から複数の役割を持ったグループがあり, そこでのゲームを考える. つまりここでは「役割」を「グループ」と解釈して議論を行う. Selten [23] では, 確率 $\frac{1}{2}$ で役割を与えられていたが, ここでは当初から役割を与えられたプレイヤー (グループ) がいると考える. 例えばこのグループとは, 利他主義者と利己主義者などが考えられる. そしてこのグループの大きさ・人口の変動を考える.

ここでは $n(2 \leq n < \infty)$ 個のグループがあり, それぞれのグループの人口に占める割合を f_i とする. π_i をグループ i の平均利得とすると, 人口全体の平均利得は $\bar{\pi} = \sum_{i=2}^{n} f_i \pi_i$ となる. 以後表記の簡単化のために, $\sum_{i=2}^{n}, \sum_{i=1}^{n}$ などを $\sum_{i}$ と表記する. 各グループは他のグループとの相対的な利得によって変動するとすると, 次期のグループ i の人口比率は $f_i' = f_i \frac{\pi}{\bar{\pi}}$ となる.

次にグループ i 中においてある特性を持ったプレイヤーの比率を x_i とすると, そうした特性を持ったプレイヤーの人口全体に占める比率は $\bar{x} = \sum_{i} f_i x_i$ となる.

このとき Price の公式と言われている関係式が成り立つ (命題 5). これは選択による進化の起こる前後における, 注目するグループの利得の変化を記述するものである.

命題 5. このゲームにおける利得とグループの人口の変動は次の方程式に従う. Price の公式: $\bar{\pi}\Delta\bar{x} = \mathrm{Cov}[\pi, x] + E[\pi\Delta x]$.

証明: 付録参照.

以上のようにグループ構造がある場合は, Price の公式が成り立つ. この場合もまた Replicator 方程式となった.

5 例: 戦略が 2 つある場合

5.1 Harsanyi 型

前節までが一般論であった, ここでは具体的なケースを考える. そこでここでは最も簡単なゲームである, 対称 2 人ゲーム, 非対称 2 人ゲームを取り上げ, Harsanyi [8] 型のゲー

ムを分析する．このときの利得表 ($a,b,c,d \in \Re$[13]) は次のようである．

I＼II	戦略 C	戦略 D
戦略 C	a,a	$0,0$
戦略 D	$0,0$	b,b

利得表 1

I＼II	戦略 C	戦略 D
戦略 C	a,b	$0,0$
戦略 D	$0,0$	c,d

利得表 2

このときの対称 2 人ゲームの Replicator 方程式は次を得る．

$$\dot{x} = (ax - by)xy, \quad y = 1 - x.$$

ただし x をプレイヤー 1 が戦略 C をとる確率とする．また非対称 2 人ゲームの Replicator 方程式は次を得る．

$$\dot{y} = y(1-y)\big\{a - (a+c)x\big\}, \quad \dot{x} = x(1-x)\big\{d - (b+d)y\big\}.$$

ただし y をプレイヤー 1 が戦略 C をとる確率, x をプレイヤー 1 が戦略 D をとる確率とする．

例 前節の例と同様の設定にする．

(1) コーディネーション・ゲーム (coordination game) 次にあるような利得表のコーディネーション・ゲームにおいて, 全ての Nash 均衡は ε の下で, 到達可能である．またこのゲームは対称 2 人ゲームである．

I＼II	a_2	b_2
a_1	$2+\gamma\delta_1, 2+\gamma\delta_1$	$\gamma\delta_1, 0$
b_1	$0, \gamma\delta_1$	$1,1$

このときの Replicator 方程式は次を得る．ただし x をプレイヤー 1 が戦略 1 を採用する確率とする．

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(1-x)\big\{(2+\gamma\delta_1)x - (1-\gamma\delta_1)(1-x)\big\},\\ &= x(1-x)\big\{3x - 1 + \gamma\delta_1\big\}.\end{aligned}$$

よってこれから平衡点は, $x = 0, 1, \dfrac{1-\gamma\delta_1}{3}$ と分かる．

またこのゲームの Potential 関数は次を得る．

$$V(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{4-\gamma\delta_1}{3}x^3 + \frac{1-\gamma\delta_1}{2}x^2 + C.$$

この Potential 関数は混合戦略 (内点解) を頂点とする, 単峰型の関数である．利得 a, b に摂動を加えると, 関数の形状が変化するので, 局所不安定である．特に摂動が大きい場合,

[13] a,b,c,d の符号によって, ゲームの型が決まる．

内点解で極値を失ってしまう．

(2) 男女の争い (battle of the sexes)　男女の争いは非対称 2 人ゲームであった．このときの Replicator 方程式は次を得る．ただし y をプレイヤー 1 が戦略 1 を採用する確率, x をプレイヤー 2 が戦略 2 を採用する確率とする．

$$\dot{y} = y(1-y)\{2+\gamma\delta_1-3x\}, \quad \dot{x} = x(1-x)\{2-\gamma\delta_2-3y\}.$$

よってこれから平衡点 $(y^*, x^*) = (0,0), (1,1), (1,0), (0,1), \left(\frac{2-\gamma\delta_2}{3}, \frac{2+\gamma\delta_1}{3}\right)$ と分かる．ただし内点解が存在するためには, $0 \leq \frac{2-\gamma\delta_2}{3} \leq 1$, $0 \leq \frac{2+\gamma\delta_1}{3} \leq 1$ が成立する必要がある．プレイヤー 2 が戦略 1 を採用する確率は, $1-x^* = \frac{1-\gamma\delta_1}{3}$ となり, プレイヤー i が戦略 1 を選ぶ内点解の確率の組みは, $(y^*, 1-x^*) = \left(\frac{2-\gamma\delta_2}{3}, \frac{1-\gamma\delta_1}{3}\right)$ である．このときの内点解の局所安定性は鞍点となっている (証明略). よって局所安定性は変わらないことが分かる．つまり当初からプレイヤーに多様性がある場合には, 環境変動の影響は安定性には与えないことが分かる．

I＼II	a_2	b_2
a_1	$2+\gamma\delta_1, 1+\gamma\delta_2$	$\gamma\delta_1, 0$
b_1	$0, \gamma\delta_2$	$1, 2$

5.2　Selten 型

ここでは最も単純な対称 2 人ゲームにおいて, 人口中に 2 つのタイプ (S, A) が存在する場合のゲームを考察する．

I＼II	H	D
H	a, a	$0, 0$
D	$0, 0$	b, b

ここでは各プレイヤーはランダムにマッチングするとする．ここでのマッチングのあり方としては, [AA],[AS],[SS] の 3 通りが考えられる．それぞれのマッチングした時の平均利得は, 利得表から, $\pi_{AA} = a$, $\pi_{AS} = 0$, $\pi_{SS} = b$ である．それぞれのグループの人口中に占める比率をそれぞれ, f_{AA}, f_{AS}, f_{SS} とする．人口中のプレイヤー A の比率を f とすると, ペア AA が生じる確率は f^2, ペア SS が生じる確率は $(1-f)^2$, そして ペア AS が生じる確率は $1-f_{AA}-f_{SS} = 1-f^2-(1-f)^2 = 2f(1-f)$ となる．

各グループ内での A の特性をもったプレイヤーの比率は, それぞれ $x_{AA} = 1$, $x_{AS} = \frac{1}{2}$, $x_{SS} = 0$ となる．一方ペア AS における A のプレイヤーの次期の利得は, A のプレイヤーがグループ中に $\frac{1}{2}$ おり, A のプレイヤーの平均利得が 0 なので, 次期は 0 となる．したがってペア AS における A のプレイヤーの比率の変化は 0 である．

ここで Price の公式$\left(\bar{\pi}\Delta\bar{x} = \mathrm{Cov}[\pi, x] + E[\pi\Delta x]\right)$を用いる．Price の公式の第 2 項目の期待値は $E[\pi, \Delta x] = \sum_{i\in\{AA,AS,SS\}} f_i\pi_i\Delta x_i = 0$ を得る．

また

$$\bar{x} = \sum_{i \in \{AA, AS, SS\}} f_i \pi_i = f$$

であることから, Price の公式の第 1 項目の共分散は次を得る.

$$\sum_{i \in \{AA, AS, SS\}} f_i \bar{\pi}(x_i - \bar{x}) = 0.$$

よってグループ内の利得と人口との共分散は次を得る.

$$\mathrm{Cov}\ [\pi, x] = \sum_{i \in \{AA, AS, SS\}} f_i(\pi_i - \bar{\pi})(x_i - \bar{x}) = f(1-f)\big\{f(a+b) - b\big\}.$$

これは 4.2 節でも取り上げたように Replicator 方程式と同様の形をしている.

例 タカ・ハトゲーム $(a, b < 0)$: この場合も同様に, グループ内の均衡点は強均衡 2 つ (HD, DH) と混合戦略均衡という 3 つ存在する. 先ほどと同様の議論を用いることによって, 混合戦略は ESS とはならない. そのため Selten [23] の結果と同様になる.

6 拡張: Global ゲームへ応用

ここでは上述した手法を用いて, Global ゲーム [3, 19] を分析し, その違いを考察する.

6.1 基本モデル

まずこの Global ゲームを定式化する. このゲームは次のような利得表のゲームである.

I＼II	C	D
C	x, x	$x, 0$
D	$0, x$	a, a

ただし $a > 0$ とする. このゲームにおいて $x < 0$ ならば, $a > 0$ であるため, プレイヤー 1, 2 共に戦略 D を選択する. 一方 $x > a$ ならば, プレイヤー 1,2 共に戦略 C を選択する. つまり $x < 0$ あるいは $x > a$ の場合, このゲームは唯一の Nash 均衡が存在する. しかし $x \in [0, a]$ の場合には, 両プレイヤーがともに戦略 C を選択する場合と, 両プレイヤーがともに戦略 D を選択する場合の 2 つの Nash 均衡が存在する.

ここで各プレイヤーの利得に関する情報の不完全性を導入し, プレイヤーの行動がどう変化するかについて考える. ここでは x の値が $[x^-, x^+]$ の範囲で一様分布に従う確率変数であり, $[0, a]$ は $[x^-, x^+]$ に含まれるとする. つまり x の値は完全情報のもとで唯一の Nash 均衡が存在するケースと複数の Nash 均衡が存在するケースの両者を含んでいる. またプレイヤー A は真の x の値にノイズが加わったシグナル s^A を観察し, s^A は $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ の範囲で一様分布に従う確率変数とする. このような設定の下で次の命題が成り立つ.

命題 6. (Carlsson and van Damme [3]) 情報のノイズがきわめて小さい $(\varepsilon \to 0)$ とする

と, s^{-*} と s^{+*} が一致する．また各プレイヤーの戦略の選択を戦略 C と戦略 D に分割境界シグナル s^* が存在する．そして $\varepsilon \to 0$ より, シグナルが x の真の値に収束するため, x についても同様な境界値 x^* が $x \in [0, a]$ の範囲に存在する．

6.2 動学

5.2 節ではランダムにマッチングする場合を取り上げたが, ここで各プレイヤーは**選り好みマッチング**(assortative matching) をしているとする．そのため複数のグループがあるとする．

この Global ゲームにおいては相手の利得 (グループ) を正確には観測できない．正確に観測できる場合では確率 1 で好みの相手とマッチし, 観測できない場合にはランダムにマッチングするとする．つまり観測によるノイズをここではマッチングによる選り好み度と考えることで, 動学の Global ゲームと解釈する．よって上述の結果から選り好み度が大きい場合は, 均衡が唯一になることが推測される．

ここでは 2 つのグループ構造 (S, A) がある場合の均衡を考察する．

I＼II	C	D
C	x, x	$x, 0$
D	$0, x$	a, a

I＼II	C	D
C	x, x	$0, 0$
D	$0, 0$	$a-x, a-x$

ここでは各プレイヤーは毎回違う相手と出会って上記のゲームを行う．ただしこのときのプレイヤーはランダムにマッチングするのではなく, 自分と同じタイプのプレイヤーと確率 r で出会い, $1-r$ で完全にランダムにマッチングするとする．よって $r=0$ ならば, ランダムにマッチングするとする．

ここでのマッチングのあり方としては, [AA], [AS],[SS] の 3 通りが考えられる．それぞれのグループの平均利得は, 利得表から, $\pi_{AA} = x$, $\pi_{AS} = 0$, $\pi_{SS} = a - x$ である．それぞれのグループの人口中に占める比率をそれぞれ, f_{AA}, f_{AS}, f_{SS} とする．人口中のプレイヤー A の比率を f とすると, ペア AA が生じる確率は $f_{AA} = f\big(r + (1-r)f\big)$ となる．1 人目のプレイヤーが A である確率は f で, このプレイヤーは確率 r で同じ A のプレイヤーと出会い, 確率 $1-r$ でランダムマッチングとなって確率 f で A のプレイヤーと出会えるからである．同様にして, ペア SS が生じる確率は $f_{SS} = (1-f)\big(r + (1-r)(1-f)\big)$ となり, そしてペア AS が生じる確率は $1 - f_{AA} - f_{SS} = 2f(1-f)(1-r)$ となる．

各グループ内での A の特性をもったプレイヤーの比率は, それぞれ $x_{AA} = 1$, $x_{AS} = \frac{1}{2}$, $x_{SS} = 0$ となる．一方ペア AS における A のプレイヤーの次期の利得は, A のプレイヤーがグループ中に $\frac{1}{2}$ おり, A のプレイヤーの平均利得が 0 なので, 次期は 0 となる．したがってペア AS における A のプレイヤーの比率の変化は 0 である．

先ほどと同様に Price の公式を用いる．Price の公式の第 2 項目の期待値は $E[\pi, \Delta x] = \displaystyle\sum_{i \in \{AA, AS, SS\}} f_i \pi_i \Delta x_i = 0$ を得る．

また

$$\bar{x} = \sum_{i \in \{AA, AS, SS\}} f_i \pi_i = f$$

であることから, Price の公式の第 1 項目の共分散は次を得る.

$$\sum_{i\in\{AA,AS,SS\}} f_i\bar{\pi}(x_i-\bar{x})=0.$$

よってグループ内の利得と人口との共分散は次を得る.

$$\mathrm{Cov}\,[\pi,x]=\sum_{i\in\{AA,AS,SS\}} f_i(\pi_i-\bar{\pi})(x_i-\bar{x})=f(1-f)\big\{af-(a-x)+r(x-af)\big\}.$$

この方程式から次のことが分かる.

命題 7. Nash 均衡点は 3 つ存在し, (i) $x>a$ のとき, $\mathrm{Cov}[\pi,x]>0$ であり, (ii) $x<0$ のとき, $\mathrm{Cov}[\pi,x]<0$ である. このとき ESS は唯一である. (iii) $x\in[0,a]$ で, $af-(a-x)+r(x-af)>0$ を満たすとき, $\mathrm{Cov}[\pi,x]>0$ である. また $af-(a-x)+r(x-af)<0$ を満たすとき, $\mathrm{Cov}[\pi,x]<0$ である. このとき ESS は唯一である. よってこれらを満たさない時には, 複数均衡が生じている. 特に $r\to 1$ のとき, 境界値 $x=\dfrac{a}{2}$ が存在し, $x>\dfrac{a}{2}$ のとき, $\mathrm{Cov}[\pi,x]>0$ であり, $x<\dfrac{a}{2}$ のとき, $\mathrm{Cov}[\pi,x]<0$ であり, ESS は唯一である.

以上から Global ゲームを Replicator 方程式を用いて分析し, $x>a$ または $x<0$ のときは ESS は唯一であり, $x\in[0,a]$ であっても, 条件によっては唯一の ESS を持つ. 特に $r\to 1$ の場合唯一の ESS を持つ. このように ESS に関して, 既存の Global ゲーム [3] と同様の結論を得た.

7 終わりに

以上のように既存の理論をまとめ, Replicator 方程式を用いて, Harsanyi [8] 型, Selten [23] 型のゲームを分析した. その結果それぞれ静学の結論と整合的であり, 次のことが分かった. 同一の利得構造を持つ場合, 環境変動に戦略の多様性は敏感に反応するが, 同一ではない場合は, 変化しない. またこのゲームにおける戦略均衡は分散 σ の下で接近可能である. (Harsanyi [8] 型, 共進化) 次に利得構造に関わらず, 不完備構造のあるゲームは戦略の多様性は失われやすい. (Selten [23] 型, 共進化) 最後に各プレイヤーの観測にノイズがある場合は, 戦略の多様性がある場合であっても, 多様性が失われる可能性がある. (Global Game [3], 共進化)

既存の研究 [13] では効用関数の構造によって, 戦略の多様性が失われるかであったが, この研究では情報の非対称性によって, 多様性が失われるか否かであることが分かった.

進化ゲーム理論を用いると, 良いものが生き残るという, 淘汰システムを採用しているために戦略の多様性を失いやすく, 多様な状態は環境に敏感に変化する. その上情報に関する非対称性が存在すると, 戦略の多様性は失われやすい.

このような構造を持っているので, 社会として戦略の多様性を保つには, 多様な人間の存在や単一の場合は予想も立てられないくらいの不確実にさせるか, 均衡に収束していく前に, ゲームの構造自体 (ルール) を変化させていくなどが考えられる.

付録

命題 2 の証明:　平均利得 $\bar{g} = \sum_{i=1}^{N} x_i g_i$ である．これを時間で微分すると, 次を得る．

$$\frac{d\bar{g}}{dt} = \frac{d\Big(\sum_{i=1}^{N} x_i g_i\Big)}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\Big(\frac{dx_i}{dt}\cdot g_i\Big). \tag{A.1}$$

ここで $\frac{dx_i}{dt}$ は Replicator 方程式であったので,

$$\frac{d\bar{g}}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\Big(x_i\big[g_i-\bar{g}\big]\cdot g_i\Big) = \sum_{i=1}^{N} x_i\big[g_i-\bar{g}\big]^2 \ \ (\geq 0)$$

を得る．なぜなら,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} x_i[g_i-\bar{g}]^2 &= \sum_{i=1}^{N} x_i\big(g_i^2-2g_i\bar{g}+\bar{g}^2\big) = \sum_{i=1}^{N} x_i g_i(g_i-\bar{g}) - \bar{g}\sum_{i=1}^{N} x_i g_i + \bar{g}^2\sum_{i=1}^{N} x_i \\ &= \sum_{i=1}^{N} x_i(g_i-\bar{g})g_i - \bar{g}^2 + \bar{g}^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i(g_i-\bar{g})g_i\end{aligned}$$

を得る．もちろん最終項は各プレイヤーの戦略の分散である．

□

命題 4 の証明:　(4.1) を式変形すると, 次を得る．

$$\log\frac{x_i(t)}{x(0)} - g_i t + \int_0^t g(t)dt = \sum_{k=1}^{n}\xi_k.$$

ただし時間 t を短い時間間隔 τ で n 等分し, 積分をその小区間に分割して表してある．また各小区間の積分を $\xi_k = \int_{(k-1)\tau}^{k\tau}\zeta(t)dt$ とした．$\xi_k(k=1,2,\cdots,n)$ は平均値 0 を持った n 個の独立な確率変数とみることができるので, これは次の中心極限定理が成り立つ．

定理 2.　(中心極限定理)　$\{X_n\}$ が独立同分布確率変数列で, $\boldsymbol{E}(X_n)=m$, $\mathrm{Var}(X_n)=\sigma^2<\infty$ を満たしているとするとき, このとき

$$W_n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{X_j(\omega)-m}{\sigma}\Big) = \frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\big(S_n(\omega)-nm\big)$$

は $n\to\infty$ のとき, 標準正規分布 $N(0;1)$ を持つ確率変数に法則収束する．すなわち,

$$\lim_{n\to\infty} P\big(W_n(\omega)\leq x\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\Big[-\frac{1}{2}u^2\Big]du, \qquad \forall x\in\Re$$

が成り立つ．

確率変数 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ に上の定理を適用し, ξ_k の分散を等しく $\sigma^2\tau$ とし, $x^*(t) = x_0 \exp\big[(\tilde{g} - g_i)t\big]$, $\tilde{g} = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t \bar{g}(t)$, $\sum \sigma_i^2 = n\sigma^2\tau = \sigma^2 t$, $dX_n = \dfrac{dX}{X}$ とし, $n \to \infty$, $\tau \to 0$ として, 時刻 t での戦略の分布は次の式に従う.

$$P(x,t)dx = (2\pi\sigma^2 t)^{-1/2} \exp\Big[-\frac{\big(\log x - \log x^*(t)\big)^2}{2\sigma^2 t}\Big]\frac{dx}{x}.$$

この形の分布は**対数正規分布**(lognormal distribution) と呼ばれている.

□

注 1. この分布を用いて考えたときの戦略の分布の期待値は, $x = e^y$ とおいて計算すれば,

$$\begin{aligned}\langle x \rangle &= \int_0^\infty xP(x)dx = (2\pi\sigma^2 t)^{-1/2}\int_{-\infty}^\infty \exp\Big[-\frac{(y-y^*)^2}{2\sigma^2 t}\Big]dx \\ &= x_0 \exp\big[\tilde{g} - g_i\big]t \exp[\sigma^2 t/2]\end{aligned}$$

を得る. これは環境変動がない場合に, $\exp[\sigma^2 t/2]$ という項を掛け合わした場合を表している.

命題 5 の証明: π_i' および x_i' をそれぞれ次期のグループ i の利得およびグループ i 中においてある特性を持ったプレイヤーの比率とすると, $\bar{x}' = \displaystyle\sum_i f_i' \cdot x_i'$ と表される. また $\Delta x_i = x_i' - x_i$ とおくと,

$$\begin{aligned}\bar{x}' - \bar{x} &= \sum_i f_i' \cdot x_i' - \sum_i f_i x_i = \sum_i f_i \frac{\pi_i}{\bar{\pi}} x_i' - \sum_i f_i x_i \\ &= \sum_i f_i \frac{\pi_i}{\bar{\pi}}\big(x_i + \Delta x_i\big) - \sum_i f_i x_i = \sum_i f_i\Big(\frac{\pi_i}{\bar{\pi}} - 1\Big)x_i + \sum_i f_i \frac{\pi_i}{\bar{\pi}}\Delta x_i\end{aligned}$$

を得る. ここで $\Delta\bar{x} = \bar{x}' - \bar{x}$ とおき, 上式に両辺に $\bar{\pi}$ を掛けると,

$$\bar{\pi}\Delta\bar{x} = \sum_i f_i(\pi - \bar{\pi})x_i + \sum_i f_j \pi_i \Delta x_i \tag{A.2}$$

を得る. 右辺の第 2 項目は $\pi\Delta x$ の (重み付き) 期待値 $E[\pi\Delta x]$ そのものである. π と x との共分散は $\mathrm{Cov}[\pi, x] = \displaystyle\sum_i f_i(\pi_i - \bar{\pi})(x_i - \bar{x})$ である. ここで $\displaystyle\sum_i f_i(\pi_i - \bar{\pi})\bar{x} = 0$ であることから, (A.2) 式の右辺第 1 項目は $\mathrm{Cov}[\pi, x]$ に等しい. よって (A.2) 式は次を得る.

$$\bar{\pi}\Delta\bar{x} = \mathrm{Cov}[\pi, x] + E[\pi\Delta x].$$

□

注 2. この Price の公式は Replicator 方程式と同値である.[14]

[14] Page and Nowak [21] では, Replicator 方程式よりも一般的な Replicator-Mutator 方程式 ($\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n x_j f_j(\mathbf{x}) q_{ji} - x_i \bar{f}$) を用いて, 同値性を示している. また Replicator-Mutator 方程式は学習の方程

証明: 平均利得 $E(p) = \sum_i p_i x_i$ とおくと, 時間による 1 階微分は次を得る.

$$\dot{E}(p) = \sum_i p_i \dot{x}_i + \sum_i \dot{p}_i.$$

ここでは Replicator 方程式は $\dot{x}_i = \sum_j x_j f_j - x_i \bar{f}$ であった. これを先ほどの式に代入し, 整理すると,

$$\dot{E}(p) = \sum_{i,j} x_j p_i f_j - \bar{p}\bar{f} + E(\dot{p}) = \text{Cov }(f, p) + E(\dot{p})$$

を得る. よって Price の公式が得られた.

□

注 3. この Price の公式からは **Fisher の第 2 定理**「形式の平均水準の変化率, 形質と環境適応能力との共分散に等しい」も導出することができる. またこの第 2 定理を進化ゲーム理論の枠組みでは「グループ内での人口の変化は, グループの人口と適応度 (利得) との共分散に等しい.」と解釈することができる.

Price の公式の右辺第 2 項を省略した形 $\dot{E}(p)$ =Cov (f, p) は Fisher の第 2 定理と呼ばれている.

証明: グループ内での人口の変化は次を得る.

$$\frac{d\bar{h}}{dt} = \sum_i \frac{ds_i}{dt} \cdot h_i = \sum_i s_i(g_i - \bar{g}) \cdot h_i.$$

ここでグループ内での利得と人口との共分散は,

$$\begin{aligned}\text{Cov}(g, h) &= \sum_i s_i(g_i - \bar{g})(h_i - \bar{h}) = \sum_i s_i(g_i - \bar{g})h - \bar{h}\sum_i s_i g_i + \bar{g}\bar{h}\sum_i s_i \\ &= \sum_i (g_i - \bar{g})h_i - \bar{g}\bar{h} + \bar{g}\bar{h} = \sum_i s_i(g_i - \bar{g})h_i\end{aligned}$$

を得る. ここで Cov(g, h) は g_i と h_i の共分散, すなわち「グループ内での利得 (適応度) とグループ内での人口との共分散」にほかならない.

□

注 4. 第 2 定理を特に $h = g$ とすると, 第 1 定理が導出される.

証明: 第 2 定理 $E(w)\Delta E(z) = \text{Cov}(w, z)$. ここで, $z = w$ とすると,

$$E(w)\Delta E(w) = \text{Cov }(w, w) = \text{Var}(w)$$

式としてよく用いられ, Replicator 方程式ではある戦略の利得が平均利得よりも高ければ (低ければ), 確率 1 で増加 (減少) するが, Replicator-Mutator 方程式では, q_{ji} の値によって増加 (減少) 確率が定まる. つまり学習の不成功をも考慮に入れた微分方程式である.

を得る．よって次を得る．

$$\Delta E(w)E(w) = \mathrm{Var}(w).$$

$\square$

参考文献

[1] 荒木一法 (2001): 「混合戦略の進化論的解釈」永田良 (編著)『経済学の数理と論理』早稲田大学出版会, pp.53-64.

[2] Binmore, Ken and Samuelson, Larry (2001): "Evolution and Mixed Strategies," *Games and Economic Behavior*, Vol.**34**, pp.200-226.

[3] Carlsson, Hans and van Damme, Eric (1993): "Global Games and Equilibrium Selection," *Econometrica*, Vol.**61**, pp.989-1018.

[4] Ellison, Glenn and Fudenberg, Drew (2000): "Learning Purified Mixed Equilibria," *Journal of Economic Theory*, Vol.**90**, pp.84-115.

[5] Fudenberg, Drew and Kreps, David (1993): "Learning mixed equilibria," *Games and Economic Behavior*, Vol.**5**, pp.320-367.

[6] Fudenberg, Drew and Levine, D. K. (1998): *Theory of Learning in Games*, The MIT Press.

[7] Fudenberg, Drew and Tirole, Jean (1991): *Game Theory*, The MIT Press.

[8] Harsanyi, John C. (1973): "Games with Randomly Distributed Payoffs: A New Rationale for Mixed-Strategy Equilibrium Points," *International Journal of Game Theory*, Vol.**2**, pp.1-23.

[9] Hofbauer, Josef and Sandholm, William H. (2007): "Evolution in games with randomly disturbed payoffs," *Journal of Economic Theory*, Vol.**132**, pp.47-69.

[10] Hofbauer,Josef and Sigmund, Karl (1998): *Evolutionary Games and Population Dynamics*, Cambridge University Press. (邦訳): 竹内康博, 佐藤一憲, 宮崎倫子 (訳)『進化ゲームと微分方程式』現代数学社, 2001 年.

[11] Huck, Steffen and Oechssler, Jörg (1999): "The Indirect Evolutionary Approach to Explaining Fair Allocations," *Games and Economic Behavior*, Vol.**28**, pp.13-24.

[12] 井上義朗 (1999): 「エヴォルーショナリー・エコノミクス」有斐閣.

[13] 巌佐庸 (1998): 「数理生物学入門」共立出版.

[14] 巌佐庸 (2002): 「生物進化とゲーム理論」今井晴雄, 岡田章 (編著) 『ゲーム理論の新展開』勁草出版, pp.15-56.

[15] 川越敏司 (2004): 「実験経済学の現代」塩沢由典 (編著)『経済学の現代 1』日本経済評論社, pp.278-340.

[16] Losert, Viktor and Akin, Ethan (1983): "Dynamics of games and genes: Discrete versus continuous time," *Journal of Mathematical Biology*, Vol.**17**, pp.241-251.

[17] Maynard Smith, John (1982): *Evolution and the Theory of Games*, Cambridge Unviersity Press.

[18] Metcalfe, J. Stanley (1998): *Evolutionary Economics and Creative Destruction*, Routledge.

[19] Morris, Stephen and Shin, Hyun Song (2003): "Global Games: Theory and Applications," In Dewatripont, Mathias, Hansen, Lars Peter and Turnovsky, Stephen J. (Eds.), *Advances in Economics and Econometrics: the Eighth World Congress*, Cambridge University Press, pp.56-114.

[20] Osborne, Martin J. and Rubinstein, Ariel (1994): *A Course in Game Theory*, The MIT Press.

[21] Page, Karen M. and Nowak, Martin A. (2002): "Unifying Evolutionary Dynamics," *Journal of Theoretical Biology*, Vol.**219**, pp.93-98.

[22] Sandholm, William H. (2007): "Evolution in Bayesian games II: Stability of purified equilibria," *Journal of Economic Theory*, Vol.**136**, pp.641-667.

[23] Selten, Reinhard (1980): "A Note on Evolutionary Stable Strategies in Asymmetric Animal Conflicts," *Journal of Theoretical Biology*, Vol.**84**, pp.93-101.

[24] Van Damme, Eric. (1991): *Stability and Perfection of Nash Equilibria*, Second Edition, Springer-Verlag.

[25] Weibull, Jorgen W. (1995): *Evolutionary Game Theory*, The MIT Press. (邦訳): 大和瀬達二 (監訳)『進化ゲーム理論』オフィスカノウチ, 1998 年.