完全記憶がある確率的進化ゲーム理論
Stochastic Evolutionary Game Theory with Perfect Recall

吉川　満*

平成 20 年 8 月 30 日

概 要

本稿は時間発展的なゲームを確率論の立場で捉え直したものである．まずは Nowak [18] を一般化し, Markov 連鎖としてのゲーム理論を定式化し, その定常分布の性質を調べた．この理論は非協力ゲームでいう展開形ゲームに対応している．次に過去の行動に依存して行動を決定するという, 完全記憶があるゲーム理論を定式化した．そこでこのゲーム, ノイズがあるゲームがマルチンゲールであることやマルチンゲールとなる条件を導出した．以上のことを通じて新たな確率的進化ゲーム理論の枠組みを構築し, 確率的な側面に着目し, 容易にゲームを解くことができることを示す.

JEL: C73
Keywords: Stochastic Evolutionary Game, Behavior Strategy, Perfect Memory, Markov Chain, Martingale

1　はじめに

通常展開形 (game in extensive form), 繰り返しゲーム理論 (repeated game theory) では合理的なプレイヤーが期末の効用, それまでに得られる期待効用を計算し, それが最大になるように行動を決めるという, 後向き帰納法 (backward induction) で行動を決めていた.

一方進化ゲーム理論 (evolutionary game theory) では逐次的に行動を決定していた．Replicator 方程式を用いるものでは, ある戦略を採用したときの期待利得がゲーム全体の平均期待利得よりも高ければ, その戦略を採用する人が増加し, 低ければ減少するという近視眼的 (myopic) な行動決定であった．また Kandori, *et al.* [12], Young [25] から始まる確率的進化ゲーム理論 (Stochastic Evolutionary Game Theory) や囚人のジレンマゲームを分析した Rapoport and Chammah [20], Nowak [18], Hofbauer and Sigmund [8] などの一連の研究はある戦略からある戦略への推移確率を考えた Markov 連鎖 (Markov Chain) であった.

例えば日常生活における意思決定の問題について考えてみると, 将来の出来事を完全に推論した上で行うということ (繰り返しゲーム理論) や何も考えず, その場で行動を決定するということ (進化ゲーム理論) よりは, むしろ過去の経験に基づいてそれを行うということの方が多いと思える．そこで本稿では完全記憶を持った確率的進化ゲーム理論の枠組みを構築する．具体的にはまずこの Markov 連鎖を用いたゲームの戦略の推移のみに着目し, 一般的なゲームを構築し, 次に過去に依存して行動を決定するというモデルに拡張する.

この記憶 (memory, recall)[1], 履歴 (history) に着目した研究は数多く存在する．例えば (Bounded) Recall の問題では, Lehrer [16], Aumann and Sorin [2] がある．(Bounded) Memory の問題で

*E-mail:mitsurukikkawa@hotmail.co.jp, URL:http://kikkawa.cyber-ninja.jp/index.htm

[1] memory とは過去の情報を実際に使うかどうかという, 戦略に関する性質のことを表し, recall とは過去のことを覚えているかどうかという, ゲームにおける情報集合に関する性質である.

は, Sabourian [21], Di Tillio [23], Cole and Kocherlakota [3], などが挙げられるが, これらはいずれも繰り返しゲームの文脈であった.

そこで本稿では進化ゲーム理論において過去のすべての行動・戦略を所与として, 今期の行動・戦略を決定するとした. そのため次期のある戦略を採用する確率は条件付き確率で記述することができる. これは過去のすべての行動・戦略がフィルトレーション (filtration) となり, ある確率変数列が適合 (adapted) しているならば, マルチンゲール (martingale) であるか, どうかを調べることができる. このマルチンゲール[2)]を用いることによって完全記憶の問題を考察した. このマルチンゲールの議論は数理ファイナンスの分野で多く議論されている[3)]. ではゲーム理論の文脈でこのマルチンゲールであるかどうかを調べると, どのようなことが分かるのかを考察した. またこのゲーム理論は合理的期待形成や完全予想動学 (perfect foresight dynamics) の理論的な根拠として捉えることもできる.

本稿は次のように構成されている. 第 2 節では, Markov 過程としてのゲームを定式化し, 定常分布を調べる. 第 3 節では, 第 2 節の内容を拡張させ, 過去の行動に依存するモデルにし, これがマルチンゲールであることをし, この性質を利用しゲームを分析する. 第 4 節では, 結論と今後の課題を記す.

2 Markov Chain

2.1 準備: 展開形ゲーム

この節ではこの Markov 連鎖を用いた進化ゲーム理論 [20, 18, 12, 25, 14] を数学として捉え直す.

ここで $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし, Ω は空間, $\mathcal{F}$ は空間 Ω の部分集合の族, P は $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率とする.[4)] この Markov 連鎖で記述できるゲームは展開形ゲームで記述される. この展開形ゲームは形式的に次の 5 つの要素の組で定義される.

$$\Gamma = (K, P, p, U, h).$$

K はゲームの木, P はプレイヤー分割 (player partition), p は偶然手番の確率分布族であり, 確率変数, U は情報分割 (information partition), h は利得関数 (payoff function) を表している. これについて詳しくは岡田 [19] 等を参照されたい. 特に確率論の枠組みで記すと, $\mathcal{F}_n \in U, n \geq 0$ となる.

まず展開形ゲームについての準備を行う.

定義 1. **プレイヤーの行動戦略**(behavioral strategy of player) i は独立な確率測度の族 $(b_i(u_i))_{u_i \in U}$, ただし $b_i(u_i)$ は行動の集合 $A(u_i)$ 上の確率測度である.[5)] 特に各情報集合 $u_i \in U$, そして 行動 $a \in A(u_i)$ のとき, $b_i(u_i)(a)$ と定義する.

プレイヤー i の純粋戦略は, 各情報集合 u において 1 つの選択肢に確率 1 を付与する特別な行動戦略と見なせる.

定義 2. $\Gamma = (K, P, p, U, h)$ を展開形ゲームとする. ゲームの木 K の部分木 K' に対して,

---

[2)] 今までゲーム理論においてマルチンゲールを用いたものとして, 確率ゲーム (stochastic game) や私的情報における評判の問題 [6] が挙げられる.

[3)] 無裁定理論とマルチンゲールの分析が関係あるために盛んに研究されている.

[4)] 確率論上で標準形ゲームの定式化の詳細は吉川 [13] を参照されたい.

[5)] この定義からも分かるように戦略とは確率分布ではなく, 確率変数である.

Γ のすべての情報集合は K' の手番と K' 以外の手番を同時に含むことはない

ならば, ゲーム Γ の各構成要素を部分木 K' に制限することにより部分木 K' をもつ展開形ゲームを定義できる. このようなゲームを, ゲーム Γ の**部分ゲーム**(subgame) という. 便宜上, ゲーム自身も Γ の 1 つの部分ゲームと見なす.

定義 3. ゲーム Γ の部分ゲーム Γ' と Γ' における行動戦略の組 $b' = (b'_1, \cdots, b'_n)$ に対して, 部分ゲーム Γ' 全体をプレイヤーの期待利得ベクトル $H^s(b') = \big(H^s_1(b'), \cdots, H^s_n(b')\big)$ で置き換えてできるゲームを, 部分ゲーム Γ' と行動戦略の組 b' によるゲーム Γ の**縮約ゲーム**(truncated game) といい, $T\big(\Gamma \bigm| \Gamma', b'\big)$ と表す.

定義 4. 展開形ゲーム Γ の部分ゲーム Γ' がプレイヤーの行動戦略の組 $b = (b_1, \cdots, b_n)$ によって**到達可能**であるとは, 行動戦略の組 b の下で Γ' の初期点 o' が正の確率 $p(o'|b) > 0$ を持つことである.

定義 5. 展開形ゲーム Γ においてすべてのプレイヤー $i (= 1, \cdots, n)$ のすべての情報集合 $u \in U_i$ がただ 1 つの手番からなるとき, ゲーム Γ は**完全情報ゲーム**(game with perfect information) であるという.

完全情報ゲームでは, すべてのプレイヤーが行動を選択するとき, その手番前のゲームのプレイの結果を完全に知ることができる. このとき次の定理が成り立つことが知られている.

定理 1. (Kuhn [15]) ゲームの木が有限の長さを持つ完全情報ゲームでは, 純粋戦略による均衡点が存在する. ただし, ゲームの木の長さとは 1 つのプレイに含まれる手番の最大数のことである.

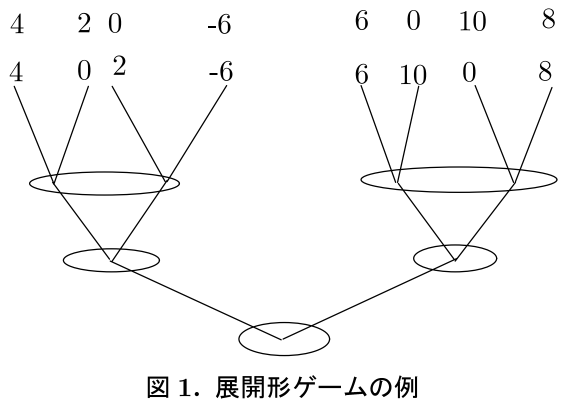

図 1. 展開形ゲームの例

2.2 準備: 確率過程としてのゲーム理論

次にこの確率変数は時間発展的であるので, 確率過程を考えることになる. さらにこの戦略は条件付き確率によって決めるとする. そこでまずこれらの定義を行う.

定義 6. **確率過程**(stochastic process) $\big\{X(t,\omega); 0 \le t < +\infty, \omega \in \Omega\big\}$ とは, 空でない任意の集合 T をパラメーター空間として持つ確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された確率変数の族である. よって各 $t \in T$ を固定する毎に, $X(t)$ が確率変数であることを意味する. 特に T が自然数ないし整数の時には, 確率変数列という.

特に本稿では過去の事象に対して, 今期の事象を決めるので, 次の条件付き確率を定義する.

定義 7. 事象 B が与えられた時の, 事象 A の**条件付き確率**(conditional probability) とは次を満たすことをいう.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

仮定 1. 本稿では状態空間 S が有限集合, つまり戦略の数が有限の場合を考える[6). よって

$$S = \{s_1, s_2, \cdots, s_N\}$$

とする.

ここで条件付き確率に対して, 過去に依存しない, 独立な確率変数列とは次の定義をいう.

定義 8. $\{X_n; n = 0, 1, 2, \cdots\}$ が**独立確率変数列**であるとは, 任意の $n = 1, 2, 3, \cdots$, 任意の状態 $s_0, \cdots, s_n$ に対して

$$P\big(X_n = s_n \,\big|\, X_0 = s_0, \cdots, X_{n-1} = s_{n-1}\big) = P(X_n = s_n)$$

が成り立つときをいう.

特に 1 期前の事象に依存して今期の事象を決定する場合は Markov 連鎖という. ここではこれに関連した内容も定義する.

定義 9. $\{X_n; n = 0, 1, 2, \cdots\}$ が **Markov 連鎖**(chain) であるとは, 任意の $n = 1, 2, \cdots$, 任意の状態 $s_0, \cdots, s_n$ に対して,

$$P\big(X_n = s_n \,\big|\, X_0 = s_0, \cdots, X_{n-1} = s_{n-1}\big) = P\big(X_n = s_n \,\big|\, X_{n-1} = s_{n-1}\big) \tag{2.1}$$

が成立するときをいう. また (2.1) を **Markov 性**(property) という.

定義 10.

$$P\big(X_n = j \,\big|\, X_{n-1} = i\big) = P_{ij}^{(n)}, \quad P^{(n)} = \Big(P_{ij}^{(n)}\Big), \quad n = 1, 2, \cdots, N$$

$P^{(n)}$ をステップ $n-1$ における**推移確率行列**(transition probability matrix) という. よって $P^{(n)}$ は状態空間 S の要素の数を N とすると, N 次正方行列である.

定理 2. Markov 連鎖は $n = 1, 2, \cdots$ に対する推移確率行列 $P^{(n)}$ と, 初期分布

$$P(X_0 = i) = \mu_i, \qquad i \in S$$

によって一意に定まる.

証明 Markov 連鎖が掲載されている確率論の教科書を参照されたい.

定義 11. $P^{(n)}$ が n に依存しないとき, **時間的に一様な Markov 連鎖**という.

定義 12. 初期分布 μ_i のとき, 次を満たす確率分布 μ_j は Markov 連鎖の**定常分布**(stationary distribution) と呼ばれる.

$$\mu_j = \sum_{i \in S} \mu_i P^{(n)}, \qquad j \in S.$$

[6) 無限集合の場合は, 戦略の数が無限存在する場合に対応し, このゲームは無限 Markov 連鎖となる. しかしこの無限 Markov 連鎖の一般的な性質は未だ多くが分かっていない.

以上までが Markov 連鎖の数学的準備であった．上記までで定義したものをゲーム理論の文脈で捉え直すと, 次のようになる．第 k 回目のゲームにおける戦略セットを $\vec{X}_k = (X_{1,k}, \cdots, X_{n,k})$ とする (ただし n はゲームをしているプレイヤーの数)．ここで, 任意有限次元の確率法則を定めると確率過程 $\{\vec{X}_k, k = 1, 2, \cdots\}$ が定まって, 繰り返しのあるゲームが定式化されたことになる．特に前回の対戦相手の戦略のみを考慮に入れて次回の戦略を決めるのであれば, この確率過程は離散時間の Markov 過程であり, 展開形ゲームとなる．さらに各自の戦略の集合が有限集合であれば, Markov 連鎖であり, その規則が時間に依存しなければ, 時間的に一様な Markov 連鎖となる.

定理 3. (大数の強法則)
(i)　有限状態を持つ既約エルゴード的 Markov 連鎖は唯一の定常分布 $\vec{\mu} \in \mathcal{P}\big(S^{(n)}\big)$ を持つ.
(ii)　このとき,

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} u_i\big(\vec{X}_T\big) = \int_{S^{(n)}} u_i(s_1, \cdots, s_n) d\vec{\mu}(s_1, \cdots, s_n),\ \forall i,$$

が確率 1 で成り立つ.

証明 Markov 連鎖が掲載されている確率論の教科書を参照されたい.

定理 1(Kuhn [15]) は完全情報ゲームにおいて最も基本的な定理である, ゲームの木が有限の長さを持つ場合, 純粋戦略による均衡の存在を証明した．仮にゲームの木が無限の長さの場合は, 必ずしも成立しないことが知られている．逆にこの進化ゲーム理論においては, ゲームの木が無限の長さを持つ場合, 定常分布が存在し, 有限の長さを持つ場合, 必ずしも定常分布に収束しないので, 成立しないということが分かる．また定理 1 では一意性は含まれないが, 定理 2 では一意に定まる．これは意思決定の仕方に違いがあるから生じる.

次にこの Markov 連鎖の定常分布の特徴づけを行う．つまり確率変数を用いて, 解概念を定義する．確率変数で表現する場合のために以下のような記号を導入する.

$\mathcal{L}(S_i)$ を S_i に値を取る確率変数 X_i の全体 $(i = 1, 2, \cdots, n)$,
$\mathcal{L}\big(S^{(n)}\big)$ を $S^{(n)}$ に値を取る確率変数 $\vec{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ の全体,
$\mathcal{L}_0\big(S^{(n)}\big)$ を $\big\{\vec{X} = (X_1, \cdots, X_n) \in \mathcal{L}\big(S^{(n)}\big), X_1, \cdots, X_n$ が独立確率変数 $\big\}$,
$\big(\vec{X}_{-i}, Y_i\big)$ を $(X_1, \cdots, X_{i-1}, Y_i, X_{i+1}, \cdots, X_n)$,
$\big(\vec{X}_i, Y_i\big)$ を $(Y_1, \cdots, Y_{i-1}, X_i, Y_{i+1}, \cdots, Y_n)$.

定義 13.　戦略 $\vec{X} \in \mathcal{L}_0\big(S^{(n)}\big)$ が **Nash 均衡**(equilibrium) であるとは,

$$\boldsymbol{E}\big[u_i(\vec{X})\big] \geq \boldsymbol{E}\big[u_i(\vec{X}_{-i}, Y_i)\big], \quad \forall i,\ \forall Y_i \in \mathcal{L}(S_i), \quad \big(\vec{X}_{-i}, Y_i\big) \in \mathcal{L}\big(S^{(n)}\big)$$

が成り立つときをいう.

定義 14.　戦略 $\vec{X} \in \mathcal{L}_0\big(S^{(n)}\big)$ が**進化的に安定な戦略**(Evolutionary Stable Strategy, ESS) であるとは,

$$(1-\varepsilon)\boldsymbol{E}\big[u_i(\vec{X})\big] + \varepsilon\boldsymbol{E}\big[u_i(\vec{X}_i, Y_i)\big] > (1-\varepsilon)\boldsymbol{E}\big[u_i(\vec{X}_{-i}, Y_i)\big] + \varepsilon\boldsymbol{E}\big[u_i(\vec{Y})\big]$$

$$\forall \vec{Y} \neq \vec{X},\ \exists \varepsilon_0 > 0,\ \ 0 < \forall \varepsilon < \varepsilon_0$$

が成立するときをいう.

またこの定義からも容易に進化的に安定な戦略は Nash 均衡条件と漸近安定性の条件である

ことが分かる.

今まで進化ゲーム理論の均衡概念として進化的に安定な戦略[7]が使われているが, ここでは大人数の主体が存在し, それらがランダムマッチングしてその平衡状態として使われていたが, 上記のように大人数の主体が存在しなくとも, 確率的に戦略を選択するのであれば, そのような仮定は不必要であると分かる.

2.3 例: 戦略が 2 つの場合

以上までが抽象的な一般論であった. ここでは最も単純な純粋戦略の集合が 2 つの場合を取り上げる. 特に先行研究 Rapoport and Chammah [20], Nowak [18], 河野 [14] では囚人のジレンマの例を取り上げている.

ここで純粋戦略の集合 $S=\{C,D\}$, $Z_n=(X_n,Y_n); n=0,1,\cdots$ は $S\times S$ の値を取る時間的に一様な Markov 連鎖とする. よって図 2 のように前期 $n-1$ に採用した戦略から今期 n 期に採用する戦略への遷移のみに着目する. よって部分ゲームに着目する.

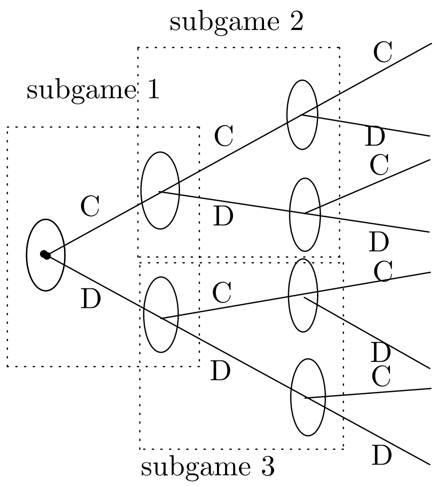

図 2. Markov 連鎖としてのゲーム

ここでは推移確率行列は 4 次の行列で表される. 各状態は (C,C),(C,D),(D,C),(D,D) の順に並んでいるものとする. ここで, 例えば $Z_n(\Omega)$ =(C,D) は根元事象 Ω において, n 回目にプレイヤー I が戦略 C を出し, プレイヤー II が戦略 D を出したことを意味する. この時推移確率行列 P は次式で与えられているとする.

$$P=\begin{pmatrix} pp' & p(1-p') & (1-p)p' & (1-p)(1-p') \\ qp' & q(1-p') & (1-q)p' & (1-q)(1-p') \\ pq' & p(1-q') & (1-p)q' & (1-p)(1-q') \\ qq' & q(1-q') & (1-q)q' & (1-q)(1-q') \end{pmatrix}$$

ここで p または q はプレイヤー II が直前にそれぞれ C または D を出した時, プレイヤー I が C を出す条件付確率である (D を出す条件付き確率はそれぞれ $(1-p)$ および $(1-q)$). プレイヤー II に対しても同様にプレイヤー I の直前の手によって C を出す条件付き確率はそれぞれ p' または q' とする. その上で互いに独立に戦略を決める. 例えば, 第 1 行第 1 列成分は直前にプレ

[7] 通常使われる進化的に安定な戦略とは次にことをいう.
戦略 $\vec{p}$ が**進化的に安定な戦略**(Evolutionary Stable Strategy, ESS) であるとは,
$$(1-\varepsilon)u(\vec{p},\vec{p})+\varepsilon u(\vec{p},\vec{q})>(1-\varepsilon)u(\vec{q},\vec{p})+\varepsilon u(\vec{q},\vec{q}),\quad \forall\vec{q}\neq\vec{p},\ \exists\varepsilon_0>0,\ \ 0<\forall\varepsilon<\varepsilon_0$$
が成立するときをいう.

イヤーI,II共にCだったとき, 次にI,II共にCを出す条件付き確率を表している. また初期分布はプレイヤーI,IIは互いに独立にCをそれぞれ確率 y, y' で出すものとする. よって初期分布は

$$\pi_0 = \big(yy', y(1-y'), (1-y)y', (1-y)(1-y')\big)$$

と表される.

次の利得関数を定義する. ここでは次のような利得表のゲームを行っているとする.[8)]

I＼II	戦略C	戦略D
戦略C	A,A	0,0
戦略D	0,0	B,B

利得表 1

よって利得関数は, $f(C,C) = A, f(C,D) = 0, f(D,C) = 0, f(D,D) = B$ である. ここでプレイヤーIの戦略 $\vec{a} = (y,p,q)$ を取り, プレイヤーIIの戦略 $\vec{b} = (y',p',q')$ を取った時のプレイヤーIの利得 $u(\vec{a},\vec{b})$ は最終的に無限に時間をかけて安定した時の利得とする, すなわち,

$$u(\vec{a},\vec{b}) = \lim_{n\to\infty} E_{\pi_0}\big[f(X_n,Y_n)\big]$$

である. ここで $E_{\pi_0}[\,\cdot\,]$ は初期分布 π_0 と推移確率行列によって一意に決まった Markov 連鎖 $Z_n; n = 0,1,2,\cdots$ の分布による平均である. この極限が存在しない時は, Markov 過程が周期的な場合であるから, いわゆる算術平均を取る. よって非周期的な場合も含めて, 極限が存在して定義可能となる. すなわち,

$$u(\vec{a},\vec{b}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} E_{\pi_0}\big[f(X_n,Y_n)\big]$$

で定義する. ここで次のようにパラメーターをおく.

$$r = p-q, r' = p'-q', s = \frac{q'r+q}{1-rr'}, s' = \frac{qr'+q'}{1-rr'}$$

すると定常分布では次の命題が得られる.

命題 1. (Nowak [18] を変更)

(i) $|rr'| < 1$ の時, Markov 過程は既約, 非周期的であって, 定常分布は次の値に収束する.

$$\pi = \big(ss', s(1-s'), (1-s)s', (1-s)(1-s')\big).$$

このとき利得関数は次の値に収束する.

$$u(\vec{a},\vec{b}) = A\cdot ss' + B\cdot(1-s)(1-s').$$

(ii) $r = r' = 1$ の時, Markov 過程は状態 (C,C) と (D,D) がそれぞれ定常分布であり, (C,D),(D,C) の2点がひとつの再帰類を作り, しかも周期は2である.

$$u(\vec{a},\vec{b}) = A\cdot yy' + B\cdot(1-y)(1-y').$$

(iii) $r = r' = -1$ の時, Markov 過程は再帰類が (C,C),(D,D) と (C,D),(D,C) の2つできて, いずれも周期は2である. このときの1周期辺りの期待利得は次の値に収束する.

$$u(\vec{a},\vec{b}) = \frac{A+B}{2}\big(yy' + (1-y)(1-y')\big).$$

(iv) $r = 1, r' = -1$ の時, (C,C) から出発した Markov 過程は (C,C) ⇒ (C,D) ⇒ (D,D) ⇒ (D,C) と順に回っていき, 周期は4である. このときの1周期辺りの期待利得は次の値に収束する.

$$u(\vec{a},\vec{b}) = \frac{A+B}{4}.$$

証明 4次元連立方程式とすべての状態和が1となることから少し煩雑な計算を行えば, 導出することができる.

---

8) この利得表は対称2人ゲームにおけるポテンシャル表示している. (I) $A > 0, B < 0$ の場合, 非ジレンマ型のゲーム, (II) $A < 0, B > 0$ の場合, 囚人のジレンマ型のゲーム, (III) $A, B > 0$ の場合, コーディネーション型のゲーム, (IV) $A, B < 0$ の場合, タカ=ハト型のゲームをしている.

次にこの定常分布における各プレイヤーの期待利得について調べる.

命題 2. (i) $|rr'| < 1\big(\Leftrightarrow r, r' \in (-1, 1)\big)$ を満たすとき, このゲームの定常分布は $A, B < 0$ のとき ESS となる.9)

(ii) $r = r' = 1$ を満たすとき, このゲームの定常分布, 戦略の組 (C,C), (D,D) は $A > 0, B < 0$ のとき (C,C) が ESS となり, $A < 0, B > 0$ のとき (D,D) が ESS となる. また $A, B > 0$ のとき (C,C), (D,D) それぞれ ESS となる. ただしこの場合どちらの定常分布となるのかは初期分布 y, y' の値による.

証明 この定常分布は安定であるので, 強 Nash 均衡条件を満たせばよい. この期待利得が強 Nash 条件を満たすのは, タカ=ハト型, $A, B < 0$ のときに限る.

次に当初から取り得る戦略に制限を設ける. ここで制限をノイズと解釈し, このノイズによっては確実に戦略 C, 戦略 D を取ることができないような状況を考える10). つまり p, q に次のような制限を設ける.

$$\varepsilon > 0 \text{ を固定して,} \quad \varepsilon \leq p \leq 1 - \varepsilon, \quad \varepsilon \leq q \leq 1 - \varepsilon,$$

とする11). すると次のことが分かる.

命題 3. $|rr'| < 1\big(\Leftrightarrow r, r' \in (-1, 1)\big)$ を満たすとき, このゲームにおいて, それぞれのゲームの型における定常分布は ESS となる.

証明 命題 2 と同様では $|rr'| < 1$ のときに関するものであった. ここではノイズを導入したため, 端点解の可能性が排除される.

以上から先行研究である Nowak [18] においては, ノイズがないときは端点解に収束することはなかったが, ノイズを導入した結果, 内点解を持つための条件を満たすために, 一種の端点解の解をも取り扱うことができた. その結果通常の (進化) ゲーム理論と同様の結論を得ることができた.

次に先行研究である Kandori, *et al.* [12], Young [25] が示した 2 人コーディネーションゲームにおいてプレイヤー集団の無限に近い有限の数の場合にはリスク支配的な (risk-dominant) 均衡が, たとえそれが他の均衡によってパレート的に支配されていても進化ゲームの完全均衡となる12), ということをこのモデルの枠組みで確認し, このモデルが確率的進化ゲーム理論のモデルのミニマルなモデルであることを示す.

---

9) Nowak [18] では囚人のジレンマゲームにおいてすべての利得が等しくなるので, ESS は存在しないと結論付けているが, 実際は ESS は存在するが, 収束しないというのが正しいであろう. 命題 3 に関しても同様のことが言える.

10) 制限を加えることの理由は何でもよい. 例えば認知の問題や, 心理, 感情の問題などが挙げられる

11) Nowak [18] ではより一般的な状況 $\varepsilon \to \varepsilon_i, i = 1, 2, 3, 4$ として分析している.

12) 例えば次のようなゲームが挙げられる.

I ＼ II	戦略 C	戦略 D
戦略 C	4,4	0,3
戦略 D	3,0	2,2

利得表 2

このゲームにおいては, (プレイヤー I の戦略, プレイヤー II の戦略) =(戦略 D, 戦略 D) はリスク支配的な均衡であるが, (戦略 C, 戦略 C) に Pareto 支配された均衡である.

定義 15. (Harsanyi and Selten [7]) コーディネーションゲームにおいて, Nash 均衡 E_1 が Nash 均衡 E_2 を**リスク支配**(risk dominance)[13] であるとは, $A > B$ のときをいう. また E_2 が E_1 をリスク支配であるとは, $A < B$ のときをいう.

系 1. このゲームにおいて, $A, B > 0$(コーディネーション型) のとき, リスク支配的な戦略は定常分布となりえる.

証明 初期値による (命題 2).

以上により Markov 連鎖を用いた最もミニマルな一般的な (進化) ゲーム理論を構築した. その結果まずゲームの期間が有限と無限の場合では, 定常分布の存在の有無に関して非協力ゲームとは異った. それ以外に関しては非協力ゲームと同様の結論を得るということが分かった. 次に具体的には戦略が 2 つの場合では具体的に定常分布を導出し, ESS となる条件を導出した. さらに当初から取り得る戦略に制限を設け, この場合の定常分布が常に ESS となることが分かった.

2.4 Martingale

次節の完全記憶があるモデルに入る前にいくつかの数学的準備を行う. まずマルチンゲールの定義を行う.

定義 16. $\{X_n, \mathcal{F}_n; n \geq 0\}$ がマルチンゲール (martingale) であるとは,
(i) $\boldsymbol{E}\big(\,|X_n|\,\big) < \infty, \quad \forall n \geq 0$
(ii) $\{\mathcal{F}_n\}$ は filtration で $\{X_n\}$ は $\{\mathcal{F}_n\}$ に適合している.
(iii) $\boldsymbol{E}\big(X_{n+1} \,\big|\, \mathcal{F}_n\big) = X_n$ a.s., $\quad \forall n \geq 0$
を満たすことをいう. (iii) において, $=$ が $\leq$ で置き換えられるとき, $\{X_n, \mathcal{F}_n; n \geq 0\}$ は優マルチンゲール (supermartingale), $\geq$ で置き換えられるとき, 劣マルチンゲール (submartingale) と呼ばれる.

マルチンゲールとは時刻 t 以前のすべての履歴が与えられたときのフィルトレーション $\mathcal{F}_t$ の条件付き期待値は, 時刻 t での値に等しいということを言っている. ここで先ほど定義したゲーム (Markov 連鎖) とこのマルチンゲールとの関係は次の命題を得ることができる. ここで I 上の実数値有界関数 $f : I \to \boldsymbol{R}$ を取り, ここで差分作用素 (difference operator) $\mathcal{L}f$ を次のように定義する. 推移確率行列 $P^{(n)} = \left(P_{ij}^{(n)}\right)$ が与えられたとき, I 上の実数値関数 $f : I \to \boldsymbol{R}$ に作用する差分作用素を

$$\mathcal{L}f(i) = \sum_{j \in I} p_{ij} f(j) - f(i), i \in I$$

と定義する. ただし f は任意の $i \in I$ に対して, $\displaystyle\sum_{i \in I} p_{ij}|f(j)| < \infty$ を満たすような関数とする.

命題 4. $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して,

$$Y_n = f(X_n) - f(X_0) - \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{L}f(X_k)$$

とおく. このとき, $(Y_n)_{n=0,1,2,\cdots}$ は $(\mathcal{F}_n)$ に関してマルチンゲールである.

[13] 最近ではこの概念をさらに発展させ, p-支配均衡という概念もある. 詳しくは今井, 岡田 [9] の第 3 章尾山-松井氏の論文, 第 5 章　宇井-梶井氏の論文を参照されたい.

証明 付録参照.

上記の命題からこのゲーム (Markov 連鎖) はマルチンゲールであることが分かった．よって次の収束定理が成り立つ.

定理 4. (マルチンゲールの収束定理) $\{X_n, \mathcal{F}_n; n \geq 1\}$ が劣マルチンゲールで $\sup_n \boldsymbol{E}(X_n^+) < \infty$ を満たしているとすると, $n \to \infty$ のとき, $\{X_n\}$ は $\boldsymbol{E}(|X|) < \infty$ を満たす極限 X に概収束する.

よって上の定理から確率変数は定常分布は概収束するということを示している．また定理 3 とも整合的であることが分かる．次にこのマルチンゲールは停止時間と関連しており, まずその停止時間の定義を行う.

定義 17. $\{\mathcal{F}_n \mid n \geq 0\}$ がフルトレーションであるとき, 確率変数 N が $\{\mathcal{F}_n \mid n \geq 0\}$ に関する**停止時間**(stopping time), あるいは **Markov 時間**(time) であるとは $\{\omega \mid N(\omega) = n\} \in \mathcal{F}_n$, $\forall n \geq 0$ が成り立つことをいう.

この定義からも確率過程とフルトレーションがマルチンゲールであることと, 確率変数が停止時間が存在することは同値であることが分かる．この停止時間の概念を用いると, 任意抽出定理 (optimal sampling theorem) が導かれる.

定理 5. (任意抽出定理) $(X_k, \mathcal{F}_k)$ を劣マルチンゲール, $T_k, k = 1, 2, \cdots$ を $\mathcal{F}_n$-停止時間とする．T_k は有界 $T_k \leq m_k$, かつ, 増大 $T_k \leq T_{k+1}$, $k = 1, 2, \cdots$ とする．Y_k を

$$Y_k(\omega) \equiv X_{T_k(\omega)}(\omega), \quad k = 1, 2, \cdots$$

と定義すれば, $(Y_k, \mathcal{F}_{T_k})$ も劣マルチンゲールである.

証明 この定理を証明する際に, 次の 2 つの補題を利用する．詳細は Doob [4] などを参照されたい.

補題 1. $\mathcal{F}_n$-停止時間 S と T が $S \leq T$ を満たせば, $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$ である.

補題 2. $(X_k, \mathcal{F}_k)$ を劣マルチンゲール, S, T を $\mathcal{F}_n$-停止時間とする.

$$S \leq T \leq m(\text{定数}) \text{ のとき, } \boldsymbol{E}(X_T \mid \mathcal{F}_S) \geq X_S, \text{ a.s.}$$

この定理は優マルチンゲールの場合も同様に成立する．よってマルチンゲールの場合も同様に成立する.

またこの定理の十分条件として次の定理が知られている.

定理 6. $(Y, \mathcal{F})$ をマルチンゲールとし, T を停止時間とする．そのとき次の条件を満たすとき, $E(X_T) = E(X_0)$ が成り立つ.

a) $P(T < \infty) = 1$, $\boldsymbol{E}(T) < \infty$

b) 次の条件を満たすような定数 c が存在する． $\boldsymbol{E}\big(|Y_{n+1} - Y_n| |\mathcal{F}_n\big) \leq c, \ \ \forall n < T.$

この定理からここで定式化した Markov 連鎖としてのゲームはマルチンゲールであることから,

ゲームの一部をとってきてもすべての部分に対して, 期待利得は等しい. これをゲーム理論で考えると, 縮約ゲームの議論に対応する.

3 完全記憶

今までは, 前期の戦略, 行動のみを所与にして, 今期の戦略, 行動を決めているモデルであった. そこでこの節では, 完全記憶があるモデルに拡張する[14]. プレイヤーが過去の自分のプレイの結果を完全に知った上で選択を行うゲームを, 一般に完全記憶ゲームという.

定義 18. 展開形ゲーム Γ が**完全記憶ゲーム**(game with perfect recall) であるとは, すべてのプレイヤー $i(=1,\cdots,n)$ のすべての情報集合 $u,v \in U_i$ に対して, もし v のある手番 y が u から枝 c によって到達可能ならば, v のすべての手番が同じ枝 c によって u から到達可能であることである.

完全記憶ゲームではすべてのプレイヤーは各手番において,
(1) 過去の自分の手番でのすべての選択, および
(2) 過去の自分の手番で利用可能であったすべての情報
を記憶している. 完全情報ゲームは, 完全記憶ゲームの特別な場合である.

よってこの完全記憶があるゲームにおいて, 確率変数列は次のように決まるとする.

(3.1) 確率変数列 $\{X_n; n=0,1,2,\cdots\}$, 任意の $n=1,2,\cdots$, 任意の $s_0,\cdots,s_n$ に対して,
$$P\bigl(X_n = s_n \bigm| X_0 = s_0, \cdots, X_{n-1} = s_{n-1}\bigr)$$

このゲームを前節と同様に戦略の推移に着目したとしても解くことはできないので, 確率論の手法を用いることによって分析する. 通常このようなゲームを分析する際には, Aumann が定式化した相関均衡点 [1] の議論を用いる.

この場合過去の行動・状態からある確率で遷移して新たな状態となる. これが無限回繰り返すということを考えているので, 数学的には確率変数の無限直積を考えていることになる. では実際に無限個の独立確率変数が定義できるような確率空間があるのかという問題が生じる. この独立確率変数列の存在については次の一般的な結果がある.

定理 7. $(\Omega_k, \mathcal{F}_k, \mu_k)$, $k=1,2,\cdots$ を確率空間の無限列とする. 直積 $\Omega = \displaystyle\prod_{k=1}^{\infty} \Omega_k$ の座標関数 $x=(x_1,x_2,\cdots) \in \Omega \mapsto x_k \in \Omega_k$ をすべて可測にする最少の σ-集合体を $\mathcal{F}$ とするとき, 可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上に次のような確率測度 $P = P^{\mu}$ が唯一存在する:
$$P(x_1 \in A_1, \cdots, x_n \in A_n) = \mu_1(A_1) \times \cdots \times \mu_n(A_n) \qquad (A_k \in \mathcal{F}_k)$$

証明 Doob [4] などを参照されたい.

次に定理 5(任意抽出定理) から次の Wald の方程式が導く. ただし通常 Wald の方程式は確率変数の和に関して使用されている[15]が, ここでは確率変数の積に関して Wald の方程式と同様

---
[14] Matsui and Matsuyama [17] によって考察された将来のことが完全に予想できるという, 完全予想動学 (perfect foresight dynamics) とは真逆の動学となる.
[15] 通常 Wald の方程式とは次を指す.

の趣旨の方程式を導出する.

定理 8. (積に関する Wald の方程式)　X_n は確率変数とする. T が $E(T) < \infty$ を満たす停止時間, μ は X_n の平均であり, 有限の値であるとき,

$$\boldsymbol{E}(X_1 \times \cdots \times X_T) = \mu^{E(T)}$$

が成り立つ.

これを証明するのは次の"積"のマルチンゲールに関する角谷の定理 [24] が必要である.

補題 3.　$X_1, X_2, \cdots$ を非負独立確率変数列で, 各々の平均は 1 であるとする. $M_0 = 1$ と定義し, $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$M_n := X_1 X_2 \cdots X_n$$

とする. このとき, M は非負マルチンゲールであり,

$$M_\infty := \lim M_n \text{ が a.s. に存在する.}$$

そして以下の (i),(ii),(iii),(iv),(v) は同値である.

(i)　$\boldsymbol{E}(M_\infty) = 1$,

(ii)　$\mathcal{L}^1$ の意味で $M_n \to M_\infty$,

(iii)　(M) は一様可積分 (UI)

(iv)　$\prod a_n > 0$, ただし $0 < a_m := \boldsymbol{E}(X_n^{\frac{1}{2}}) \leq 1$,

(v)　$\sum(1 - a_n) < \infty$

もし上の 5 つのどれか 1 つが成り立たないときには,

$$P(M_\infty = 0) = 1$$

である.

証明　証明は Williams [24] などを参照されたい.

定理 8 の証明　付録参照.

これらから次の命題が成り立つことが分かる.

命題 5.　この完全記憶があるゲームはマルチンゲールである.

証明　自明.

以上からこのゲームがマルチンゲールであるならば, 積に関する Wald の方程式を使うことによって, 遷移確率の平均 p^* が定まる. これから各主体の期待効用の値が分かり, その Nash 均衡が定まる. このようにマルチンゲールであれば, 容易にゲームを解くことができる. ただしこのゲームであっても通常の進化ゲーム理論における Nash 均衡と一致する.

例 1.　よく知られた繰り返し囚人のジレンマ (利得表 3) を取り上げる. ただし $T > R > P > S$ を仮定する. 今までの議論からランダム停止時刻までの利得和は, 平均停止時刻と期待利得の平均の積で表される (利得表 3'). ただし 「$^-$」は停止時間までの平均期待利得を表していると

X_n は確率変数とする. T が $E(T) < \infty$ を満たす停止時間, μ は X_n の平均であり, 有限の値であるとき,

$$\boldsymbol{E}(X_T - X_0) = \mu \boldsymbol{E}(T)$$

が成り立つ.

する.

I＼II	戦略 C	戦略 D
戦略 C	R, R	S, T
戦略 D	T, S	P, P

利得表 3

I＼II	戦略 C	戦略 D
戦略 C	$\bar{R}$,$\bar{R}$	$\bar{S}$,$\bar{T}$
戦略 D	$\bar{T}$,$\bar{S}$	$\bar{P}$,$\bar{P}$

利得表 3'

よって Pareto 最適な協調行動を実現させるためには, Nash 均衡条件から $\bar{R} \geq \bar{T}$ かつ $\bar{S} \geq \bar{P}$ という条件が必要である. これから $1 \geq p^* \geq \dfrac{T}{R+T} \geq 0,$　かつ　$1 \geq p^* \geq \dfrac{P}{S+P} \geq 0$ を得る. よってこれから次の条件を満たすとき, Pareto 最適な協調行動を実現することができる.

$$1 \geq p^* \geq \max\left\{\frac{T}{R+T}, \frac{S}{S+P}, 0\right\}.$$

ただし停止時間まで戦略 C を取る平均確率を p^* とする. このように確率論を用いると容易に分析できる.

次に (3.1) にノイズ ε を導入する[16).

$$P\big(X_n = s_n + \varepsilon \,\big|\, X_0 = s_0, \cdots, X_{n-1} = s_{n-1}\big)$$

ここでは様々な分布のノイズ ε が考えられる.

命題 6. 平均が 0 であるような無相関のノイズ[17) がある完全記憶があるゲームはマルチンゲールであり, 平均が 0 でないような相関のあるノイズ[18) がある完全記憶があるゲームはマルチンゲールはない.

証明 期待値を取り, 平均が 0 か否かで, 定義 15 (iii) が成立するか否かが定まり, マルチンゲールであるか否かが定まる.

よってノイズに相関がある場合, 部分ゲームとして抽出することができない. 以上の議論によって相関均衡点で議論を行う場合, マルチンゲールであるか否かことを考えることによって, 分析が容易になることが分かった.

4 まとめ

以上のように時間発展的なゲームを確率論の立場で捉え直した. その結果次のことが分かった. 有限 Markov 連鎖は非協力ゲームで言う, 展開形ゲームであった. ただし有限 Markov 連鎖は非協力ゲームとは異なり, 定常分布が一意ではなかった. また戦略が 2 つの場合のゲームにおいて, 定常分布を求め, その性質を調べた. 次に過去の行動に依存するモデルとし, その確率過程がマルチンゲールである場合は部分ゲームに対応し, 過去の行動によらないことが分かった. それがマルチンゲールではない場合は相関均衡点の議論となる. またこのことを通じて, 数理科学としての貢献として, 確率変数の積に関して, Wald の方程式に対応するものを導出した. ここでは行動が確率的に決まるというランダムさからこのようなことが言えた.

[16)] ここでは様々な要因によって遷移確率が変動するようなものをノイズとする (Selten [22]).
[17)] 例えば標準正規分布, ホワイトノイズ (white noise) などが挙げられる.
[18)] 例えば Poisson 分布に従うノイズなどが挙げられる

今後の課題として, 数理としては戦略の数が無限の, 無限次元区間における, Markov 連鎖や Martingale の問題がある．これらは多くのことが未だ解決できていない．例えば Random 行列からのアプローチも興味深いであろう．応用問題としてこのモデルを不完備情報下のゲームに拡張する．確率的進化ゲーム理論に不完備情報構造を導入した研究として Jensen, *et al.* [10] が挙げられる．よってこのモデルを応用すると, 後者の確率的進化ゲーム理論に不完備情報構造の理論モデルともなりうる．

さらにはシミュレーションによって分析されている記憶期間の問題を数理としての分析が挙げられる[19)]．この問題は相関均衡点の問題に含まれるが, 分析手法を少し変更しないと無理かもしれない．

付録

命題 4 の証明

各 Y_n は有界で, (Y_n) が $(\mathcal{F}_n)$- 適合であることは明らかであり, この命題は次を示せばよい．

$$\boldsymbol{E}[Y_{n+1} - Y_n, A] = 0$$

ところがこの期待値は条件付き期待値を用いて,

$$\sum_{i \in I : P(X_n = i) > 0} \boldsymbol{E}\big[(Y_{n+1} - Y_n) \cdot \mathbf{1}_A \big| X_n = i\big] P(X_n = i)$$

と書き換えることができる．また

$$Y_{n+1} - Y_n = f(X_{n+1}) - f(X_n) - \mathcal{L}f(X_n)$$

は (X_n, X_{n+1}) の値のみで定まるから, 条件付き確率 $P(\cdot \mid X_n = i)$ の下で $\mathcal{F}_n$ と独立である．したがって

$$\boldsymbol{E}\big[(Y_{n+1} - Y_n) \cdot \mathbf{1}_A \big| X_n = i\big] = \boldsymbol{E}\big[Y_{n+1} - Y_n \big| X_n = i\big] \boldsymbol{E}\big[\mathbf{1}_A | X_n = i\big]$$

である．ところが, Markov 性とから

$$\boldsymbol{E}\big[Y_{n+1} - Y_n \big| X_n = i\big] = \sum_{j \in I} p_{ij} f(j) - f(i) - \mathcal{L}f(i) = 0$$

であり, 命題が示された.

(証 終)

定理 8 の証明 $X_1, X_2, \cdots$ を独立な非負確率変数の列とし,

$$\boldsymbol{E}(X_k) = \mu, \quad \forall k$$

とし, $M_0 = \mu$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ として,

$$M_n = X_1 X_2 \cdots X_n,\ \mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

と定義する．さらに $Y_n = M_n - \mu^T$ と置く．

まずこの Y_n がそれぞれ filtration $\{\mathcal{F}_n\}$ についてマルチンゲールであることを示す．ここでは M_n がマルチンゲールであれば, Y_n もマルチンゲールであるので, M_n のマルチンゲールであることを示す．このとき $n \geq 1$ に対して,

$$\boldsymbol{E}(M_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \boldsymbol{E}(M_{n-1} X_n | \mathcal{F}_{n-1}) = M_{n-1} \boldsymbol{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) = M_{n-1} \boldsymbol{E}(X_n) = \mu M_{n-1}$$

を a.s. の意味で得る．よって $\mu \leq 1$ のとき優マルチンゲールであり, $\mu = 1$ のときマルチンゲールである．また上式の両辺を μ^n で割ると,

$$\boldsymbol{E}\Big(\frac{M_n}{\mu^n} \Bigm| \mathcal{F}_{n-1}\Big) = \frac{M_{n-1}}{\mu^{n-1}}$$

となる．よって $\dfrac{M_n}{\mu^n}$ はマルチンゲールである．

[19)] 先行研究として, Sabourian [21] が挙げられる．

次にこれが任意の停止定理の条件を満たすことを示す．ここで補題 3 を用いると次の条件が成り立つことが分かる．[20]

$$\boldsymbol{E}\Big(\Big|Y_{n+1}-Y_n\Big|\ \Big|\ \mathcal{F}_n\Big)=\boldsymbol{E}\big(M_n(1-X_n)\big)<\infty$$

よって定理 6 より，$E(Y_T)=E(Y_0)=\mu, \forall T$ となる．これから

$$\boldsymbol{E}(Y_n)=\boldsymbol{E}(M_n-\mu^T)=(X_1-\mu)=0.$$

よって

$$\boldsymbol{E}(S_n-\mu^T)=0, \qquad \boldsymbol{E}(X_1\times\cdots\times X_n)=\mu^{\boldsymbol{E}(T)}.$$

(証 終)

参考文献

[1] Aumann, Robert J. (1974): "Subjectivity and Correlation in Randomized Strategies," *Journal of Mathematical Economics*, Vol.**1**, pp.67-96.

[2] Aumann, Robert J. and Sorin, Sylvain (1989): "Cooperation and Bounded Recall," *Games and Economic Behavior*, Vol.**1**, pp.5-39.

[3] Cole, Harold L. and Kocherlakota, Narayana R. (2005): "Finite memory and imperfect monitoring," *Games and Economic Behavior*, Vol.**53**, pp. 59-72.

[4] Doob, J.L. (1953): *Stochastic Processes*, John Wiley & Sons, Inc.

[5] Ellison, Glenn (1993): "Learning Local Interaction and Coordination *Econometrica*, Vol. **61**, pp. 1047-1071.

[6] Fudenberg, Drew and Levine, David K. (1992): *The Review of Economic Studies*, Vol.**59**, No. 3, pp. 561-579.

[7] Harsanyi, John and Selten, Reinhard (1988): *A General Theory of Equilibrium Selection in Games*. Cambridge, MIT Press.

[8] Hofbauer, Josef and Sigmund, Karl (1998): *Evolutionary Game and Population Dynamics*, Cambridge University Press. 邦訳: 「進化ゲームと微分方程式」現代数学社, 2001 年.

[9] 今井晴雄, 岡田章 (2002): 「ゲーム理論の新展開」勁草書房.

[10] Jensen, Mogens, Sloth, Birgitte, and Whitta-Jacobsen, Hans Jorgen (2005): "The evolution of conventions under incomplete information," *Economic Theory*, Vol.**25**, 171-205.

[11] Kakutani, Shizuo (1948): "On Equivalence of Infinite Product measures," *The Annals of Mathematics*, 2nd Ser., Vol.**49**, No.1., pp.214-224.

[12] Kandori, Michihiro, Mailath, George J. and Rob, Rafael (1993): "Learning, Mutation, and Long Run Equilibria in Game," *Econometrica*, Vol.**61**, No.1, pp.29-56.

[13] 吉川満 (2008): 「進化ゲーム理論の数理」『北海道大学数学講究録』, Series #**126**,pp.173-177.

[20] 補題 3 では $M_0=1$ であったが，ここでは $M_0=\mu$ としている．もちろんこの場合でも成り立つ．

[14] 河野敬雄 (2003): 「進化ゲームアラカルト - 確率論の立場から -」『Rokko Lectures in Mathematics』, **13**.

[15] Kuhn, H.W. (1953): "Extensive games and the problem of information," in H.Kuhn and A.Tucker (eds.), *Contributions to the Theory of Games*, Vol.II, Princetion University Press, Princeton, pp.193-216. Reprinted: Harold W.Kuhn (ed.), *Classic in Game Theory*, Princetion University Press, Princeton, pp.46-68.

[16] Lehrer, Ehud (1988): "Repeated Games with Stationary Bounded Recall Strategies," *Journal of Economic Theory*, Vol.**46**, pp.130-144.

[17] Matsui, A. and Matsuyama, K. (1995): "An Approach to Equilibrium Selection," *Journal of Economic Theory*, Vol.**65**, pp. 415-443.

[18] Nowak, Martin (1990): "Stochastic Strategies in the Prisoner's Dilemma," *Theoretical Population Biology*, Vol.**38**, pp.93-112.

[19] 岡田章 (1996): 「ゲーム理論」有斐閣, 1996 年.

[20] Rapoport, Anatol and Chammah, Albert M. *Prisoner's dilemma: A Study in Conflict and Cooperation*, The University of Michigan Press, 1965. 邦訳: 「囚人のジレンマ」啓明社, 1983 年.

[21] Sabourian, Hamid (1998): "Repeated games with M-period bounded memory (pure strategies)," *Journal of Mathematical Economics*, Vol.**30**, pp. 1-35.

[22] Selten, R. (1975): "Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games," *International Journal of Game Theory*, Vol.**4**, pp.25-55.

[23] Di Tillio, Alfredo (2004): "Bounded Recall Strategies and Public Monitoring *Mimeo*.

[24] Williams, David (1991): *Probability with Martingales*, Cambridge University Press. 邦訳: 「マルチンゲールによる確率論」培風館, 2004 年.

[25] Young, H.Peyton (1993): "The Evolution of Conventions," *Econometrica*, Vol.**61**, pp. 57-84.