共有資源のゲームにおける制度の自発的生成とその変化

吉 川 満

mitsurukikkawa@hotmail.co.jp

2006年9月1日

研究の目的

- 非対称2人ゲームによる共有資源のゲームを定式化
- 制度の自発的生成とその変化を定式化
  1. 自発的生成(ノイズの存在)
  2. 内点均衡の変化(Arnold拡散)
- Arnold拡散の発生を別の証明法
  →進化ゲーム理論の方法論の拡張

先行研究

- Sethi and Somanathan (1996):

→対称2人ゲームの枠組み, 戦略3つのとき,
Hardin(1968)が指摘しているように，罰則を加えることによって, コモンズの悲劇を回避

本研究の特徴

- 利得の大小を定めない, 一般的な非対称2人ゲームを使った
- ノイズを導入(Gale, et al. (1995))

  →漸近安定な内点解の発生
- Lyapunov関数の導入(ただし, 安定性は考えない)
- 近可積分系(積分できない系)の議論を適用

  例えば, KAMの定理, Arnold 拡散

モデル(宇沢(1995)により, 農業)

- 各主体は農場で働く. 農場での収穫高を均等分配(利得)し, 生きていく.
- 各主体の利得・適用度:

$$\pi^i(l^1,\ldots,l^n) = \frac{l^i}{L}h(L) - w\cdot l^i$$

$$= l^i\cdot(A(L) - w).$$

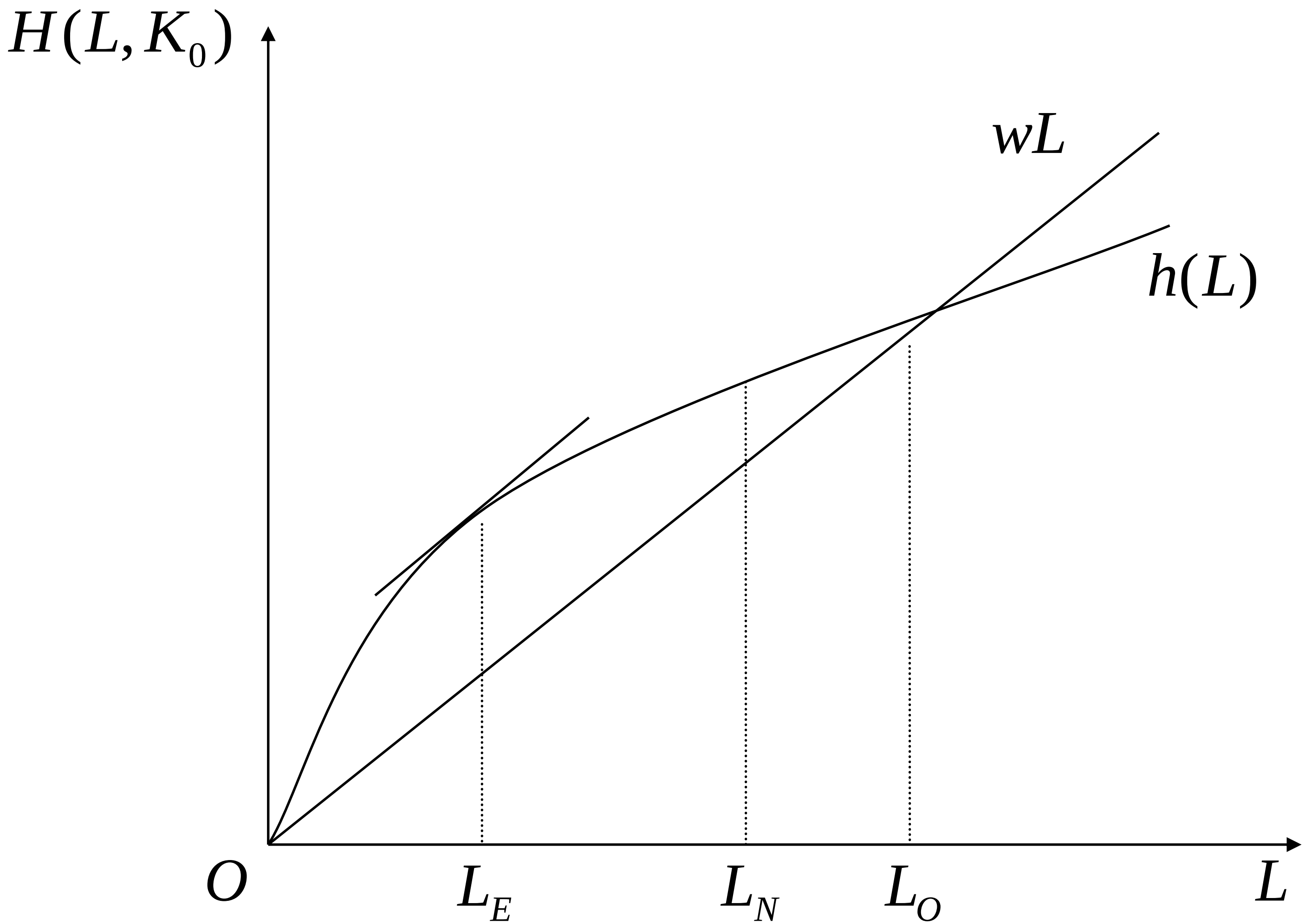
l^i： 主体iの 労働の供給量, w： 労働賃金や機会費用

$A(L)$： 労働平均生産性, $L = \sum_{i=1}^{n} l^i$： 労働の総供給量

$h(L) = H(L, K_0)$： 総収穫量, K： コモンズの総ストック

当初は環境に変化がない場合を考える.

- 社会的に効率な均衡 L_E のNash均衡 L_N の比較



$$L_E < L_N \Rightarrow \text{資源が枯渇する.}$$

進化ゲーム理論の基礎

- 対称2人ゲームと非対称2人ゲームの違い

→利得表が異なる(戦略が2つの場合)

タイプ2

タイプ1

	S1	S2
S1	A,A	C,B
S2	B,C	D,D

対称2人ゲーム

Replicator 方程式:　1本

タイプ2

タイプ1

	S1	S2
S1	A,E	C,G
S2	B,F	D,H

非対称2人ゲーム

2本

Replicator 方程式の導出

- 仮定:利得が高いほどその戦略を採用する人が多くなる.（$\Rightarrow \pi = \dot{l}$）
- Lotka-Volterra方程式(2.7)

→Replicator方程式へ(3.1)

$$\dot{l}^i_j = l^i_j(A(L) - w), L = \sum_{i,j} l^i_j, \qquad s^i_j = \frac{l^i_j}{L}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{s}^i_j = s^i_j(\pi^i_j - \bar{\pi}^i) \qquad (3.1)$$

Replicator 方程式と利得表

主体のタイプが2つ, 戦略が2つの場合: 式変形すると

$$\dot{y} = y(1-y)\{a-(a+c)x\}, \qquad (3.4)$$

$$\dot{x} = x(1-x)\{d-(b+d)y\} \qquad (3.5)$$

R

M

	戦略C	戦略D
戦略C	a,b	0,0
戦略D	0,0	c,d

利得表2

タイプRの人間が戦略Dをとる確率をx

タイプMの人間が戦略Cをとる確率をy

均衡の安定性

- 考えられる均衡(y^*, x^*)： (0,0),(0,1),(1,0),(1,1),$\left(\frac{d}{b+d}, \frac{a}{a+c}\right)$
- (3.4),(3.5)からJacobi行列:

$$\begin{pmatrix} (1-2y)\{a-(a+c)x\} & -(a+c)y(1-y) \\ -(b+d)x(1-x) & (1-2x)\{d-(b+d)y\} \end{pmatrix}$$

- Routh-Hurwitzの定理より

→(0,0): a<0,d<0, (0,1): c>0,d>0, (1,0): a>0, b>0

(1,1): b<0, c<0, $\left(\frac{d}{b+d}, \frac{a}{a+c}\right)$: $\frac{abcd}{(a+c)(b+d)}$ >0 鞍点

<0 リミット・サイクル

ノイズの存在(新規参入者の存在)

- Gale, et al. (1995)

→ Lotka-Volterra 方程式(2. 7)に $\delta_i \frac{l^M + l^R}{2}$ を足す

先ほどと同様に, Replicator 方程式を導出.

ノイズがあるReplicator 方程式(3.8),(3.9):

$$\dot{y} = y(1-y)\{a-(a+c)x\} + \delta_1(\frac{1}{2} - y),$$

$$\dot{x} = x(1-x)\{d-(b+d)y\} + \delta_2(\frac{1}{2} - x)$$

$$0 < \delta_1, \delta_2 \ll 1$$

漸近安定な内点均衡の発生

- 純粋戦略についての固有値は変更なし
- 内点解のJacobi行列

$$J^n\left(\frac{d}{b+d},\frac{a}{a+c}\right)=\begin{pmatrix} -\delta_1 & -\dfrac{bd(a+c)}{(b+d)^2} \\ -\dfrac{ac(b+d)}{(a+c)^2} & -\delta_2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \frac{abcd}{(a+c)(b+d)}<0$$

→ノイズの存在によって, 漸近安定となった内点均衡は「鞍点」ではなく、「リミットサイクル」であると分かる。

例：最終提案ゲームの場合

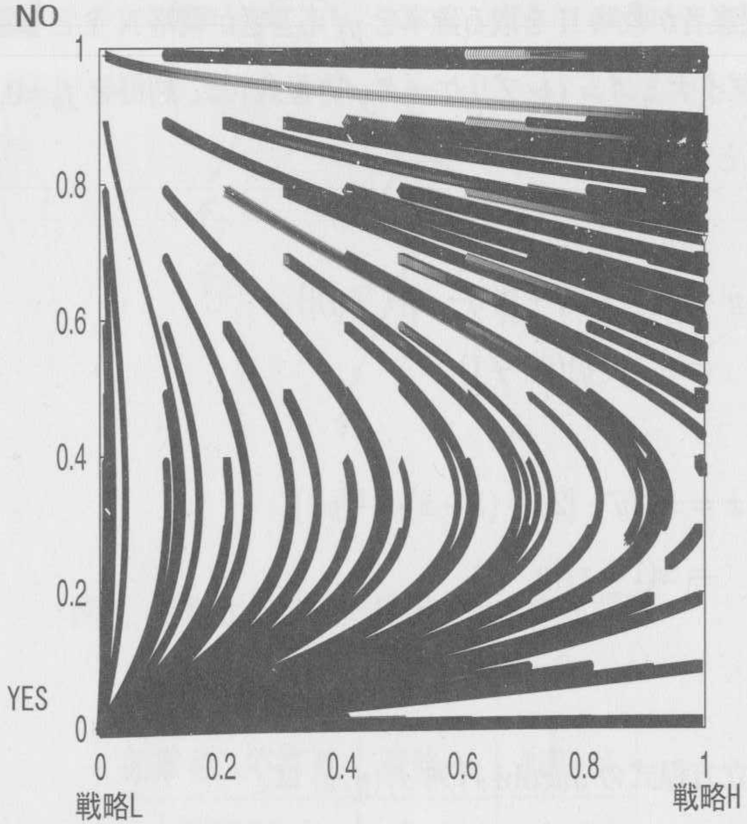


図 2: ノイズがない場合

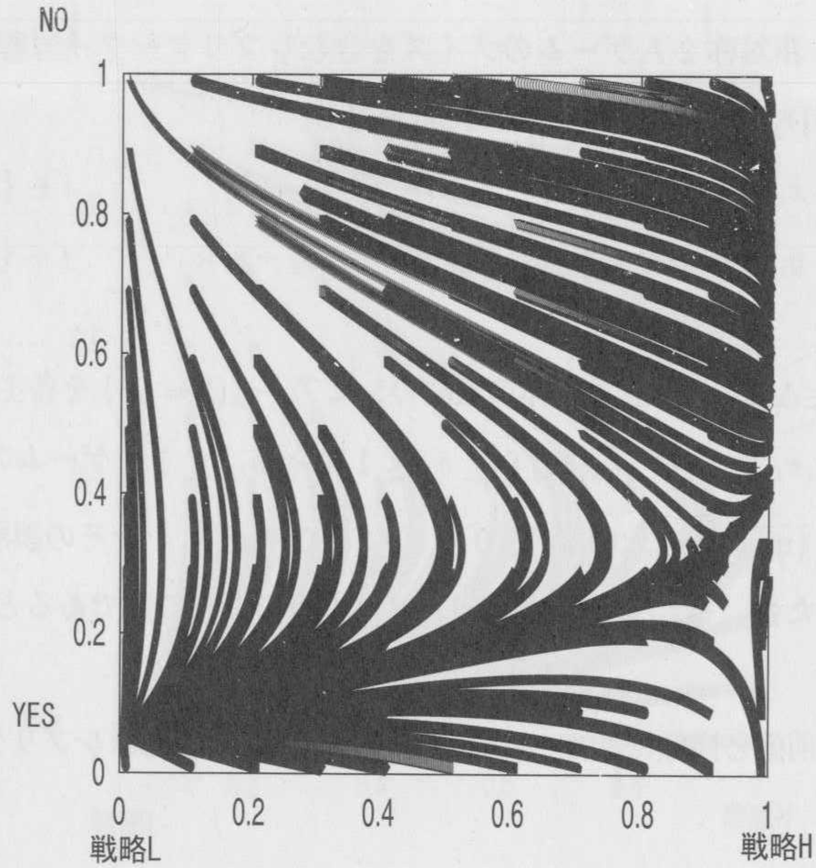


図 3: ノイズがある場合 ($\delta_I = 0.01$, δ_{II}=0.1).

吉川(2005)より.

その存在(内点解は存在するのか？)

$$\phi = \frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{x(1-x)\{d-(b+d)y\}(\frac{1}{2}-y)}{y(1-y)\{a-(a+c)x\}(\frac{1}{2}-x)}$$

$$= \frac{\varepsilon(b+d)(b-d+2\varepsilon)x(1-x)}{(d-\varepsilon)(b+\varepsilon)\{a-(a+c)x\}(1-2y)}$$

$\frac{a}{a+c} < x < \frac{1}{2}$ それとも $\frac{1}{2} < x < \frac{a}{a+c}$

の範囲内で，内点解が存在する.

Lyapunov関数

2本のReplicator 方程式から導出(Hofbauer(1996), 吉川(2005))

ゲームの状況からある値への関数:

→エントロピーの形をしている

- ノイズなし

$$H = \log \frac{y^d (1-y)^b}{x^a (1-x)^c} = \log x^{-a} y^d + \log (1-x)^{-c} (1-y)^b$$

- ノイズあり

$$H_n = \log \frac{y^d (1-y)^b (\frac{1}{2} - x)^{\delta_1}}{x^a (1-x)^c (\frac{1}{2} - y)^{\delta_2}}$$

KAMの定理の成立

- Kolmogorov - Arnold – Morser (KAM)の定理は成立しているのか？

- 吉川 (2005) の議論を適用.

→上手に局所的な分析し, 存在すると分かった δ_1, δ_2 をとる.

ノイズを入れても, Lyapunov関数が発散しない値が存在する。

→ KAMの定理の成立.

→ ノイズを入れても, 不変トーラスの存在

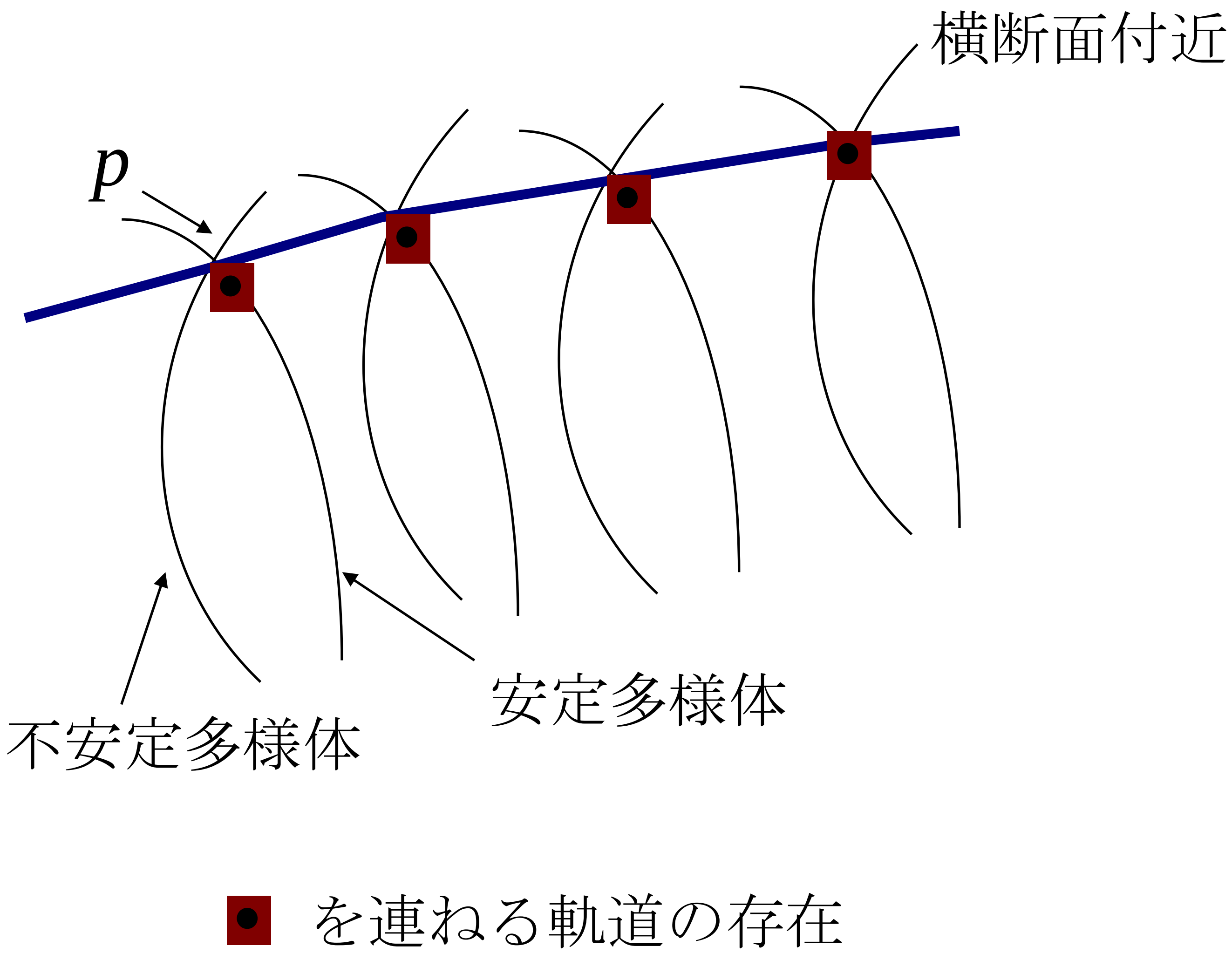
Arnold拡散

論理:

1. KAMの定理により, 不変トーラスの存在.
2. 大域的に不安定なゲームにノイズを入れると, 局所安定な内点均衡が存在する。
3. 安定多様体と不安定多様体が交わる(Melnikov関数が0)となる点pの存在.

   →横断面の存在.
4. 遷移チェーンの存在. (Arnold(1964), Theorem 2)
5. それをつなぐ, 軌道の存在. (Arnold(1964), Theorem 3)

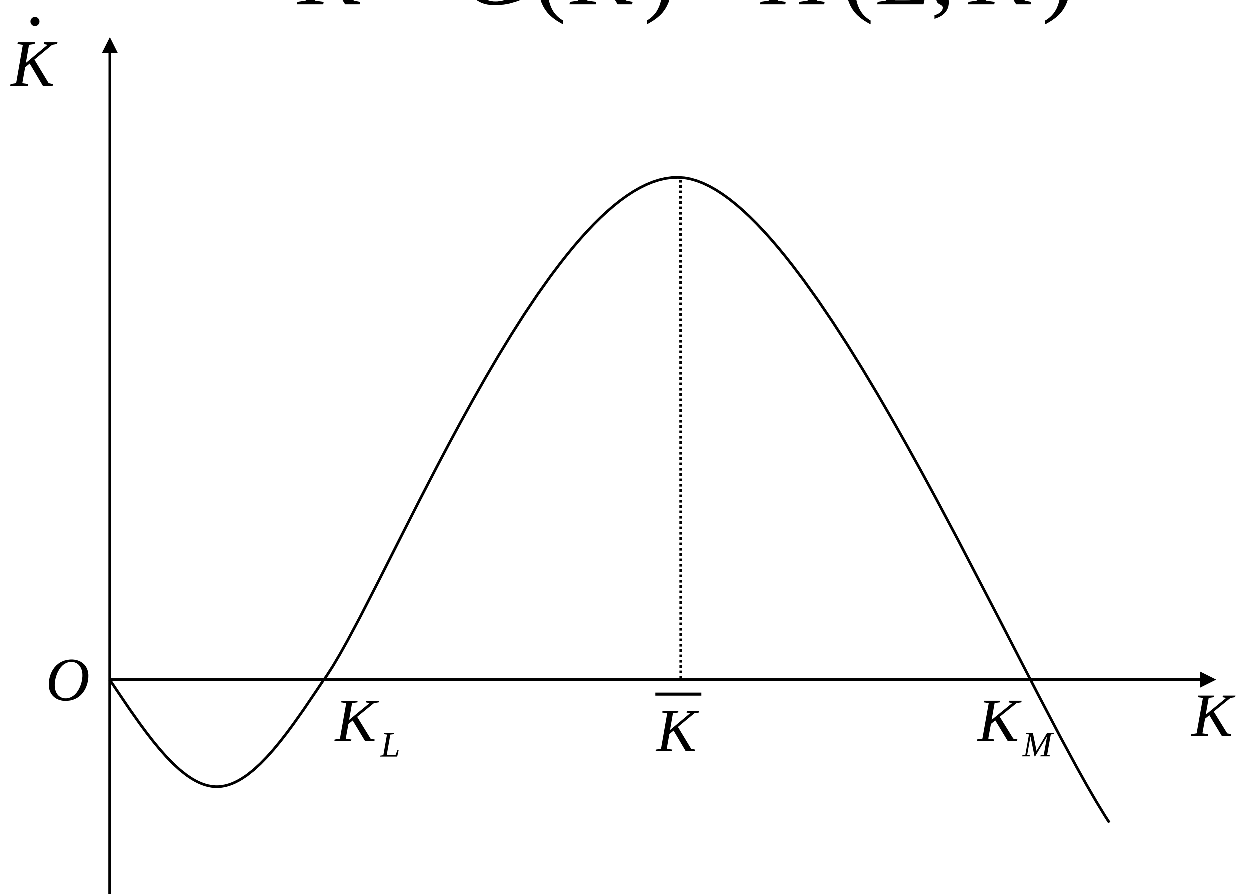
Arnold拡散の概念を図示



環境に変化がある場合

環境の変化の式:自然の成長率から総収穫量を引いたもの。

$$\dot{K} = G(K) - H(L, K)$$



均衡の安定性とノイズ

$$J(y,x,K)=\begin{pmatrix} (1-2y)\{a-(a+c)x\} & -(a+c)y(1-y) & y(1-y)\dfrac{\partial\{a-(a+c)x\}}{\partial K} \\ -(b+d)x(1-x) & (1-2x)\{d-(b+d)y\} & x(1-x)\dfrac{\partial\{d-(b+d)y\}}{\partial K} \\ -H_L\dfrac{\partial L}{\partial y} & -H_L\dfrac{\partial L}{\partial x} & G'(K)-H_L\dfrac{\partial L}{\partial K}-H_K \end{pmatrix}$$

$G'(K)-H_L\dfrac{\partial L}{\partial K}-H_K(=e)<0$ とすると, 環境に変化がないときと同じ.

ただし, 常に内点解は不安定 (固有値 : 0(重解)とe).

→ノイズの導入

$G'(K)-H_L\dfrac{\partial L}{\partial K}-H_K<0$ とすると, 漸近安定な内点均衡の発生.

Lyapunov 関数

ノイズがある場合のLyapunov 関数:

$$H_n = \log \frac{y^d (1-y)^b (\frac{1}{2}-x)^{\delta_1}}{x^a (1-x)^c (\frac{1}{2}-y)^{\delta_2}}$$

$$\dot{K} = G(K) - H(L,K)$$

環境に変化がない場合と同様に, KAMの定理が成り立ち,
同様のロジックを使うことによって, Arnold 拡散が発生していることが分かる.

結論と今後の研究

1. 環境に変化なし: 1つの純粋戦略と混合戦略(内点)をもつ大域不安定なシステムにノイズを入れると、Arnold拡散が発生.

2. 環境に変化あり: 大域不安定なシステムにノイズを入れると、Arnold拡散が発生.

→Arnold 拡散が発生する条件が異なる.

→第3者(政府やリーダー)の存在が重要に

$e > 0$ →固有値が(−,−,+)、(虚数, 虚数, ＋)を考える

→興味深い現象: Silnikov 現象, Chaos の発生などがあると知られている. Wiggins (1990)

終