Ver. 3/2

The Strategic Pricing of Options : Black-Sholes Equation (オプションの戦略的な価格付け)

Mitsuru KIKKAWA (吉川 満)
mitsurukikkawa@hotmail.co.jp

This File is available at

http://kikkawa.cyber-ninja.jp/index.htm

Outline

1. Introduction
2. Black-Sholes Model
   - 2.1 Continuous model
   - 2.2 Discrete model
3. Extended Black-Sholes Model
4. Game Theoretic Model
5. Summary

1. INTRODUCTION

This Talk (Originality)

既存の研究
(Optimality)

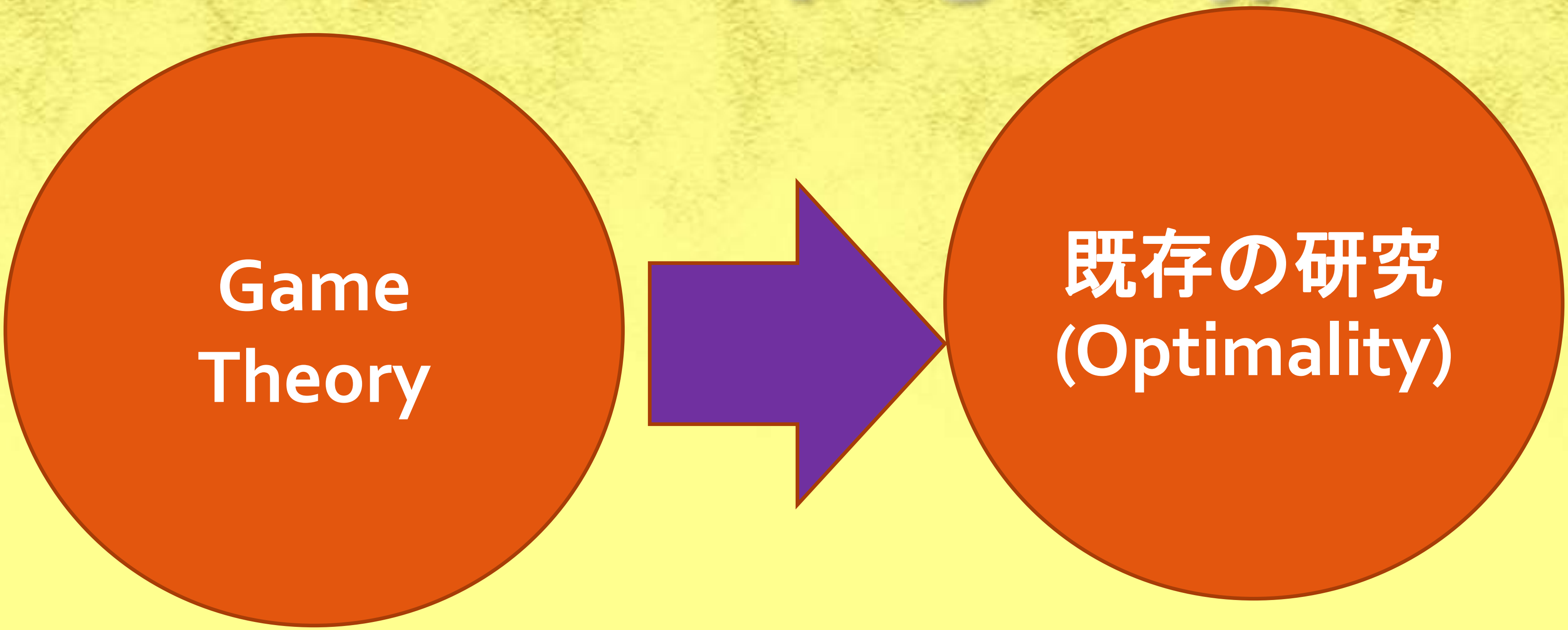
This Talk (Originality)

既存の研究
(Optimality)

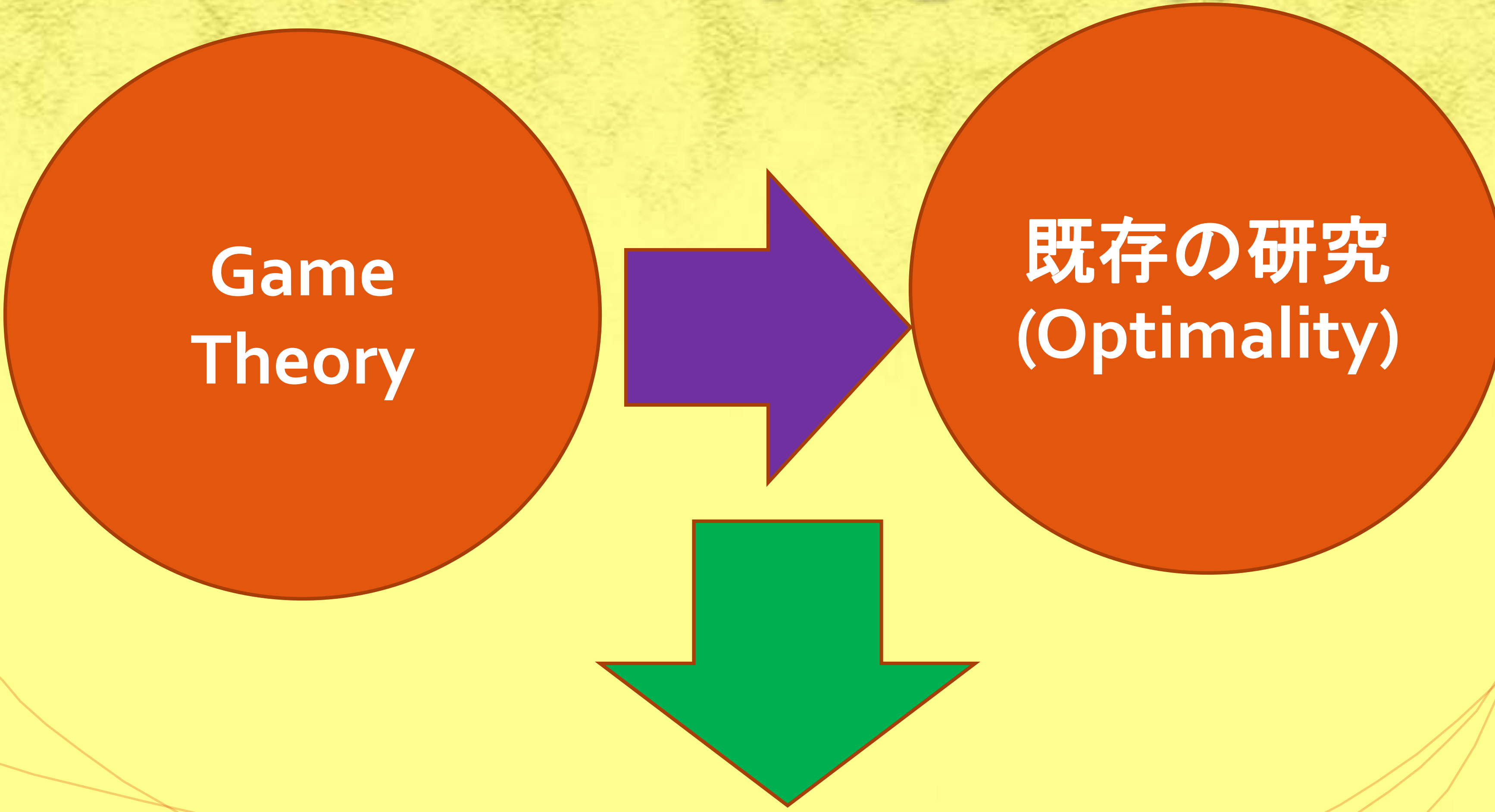
Extension

Reaction – Diffusion System

This Talk (Originality)

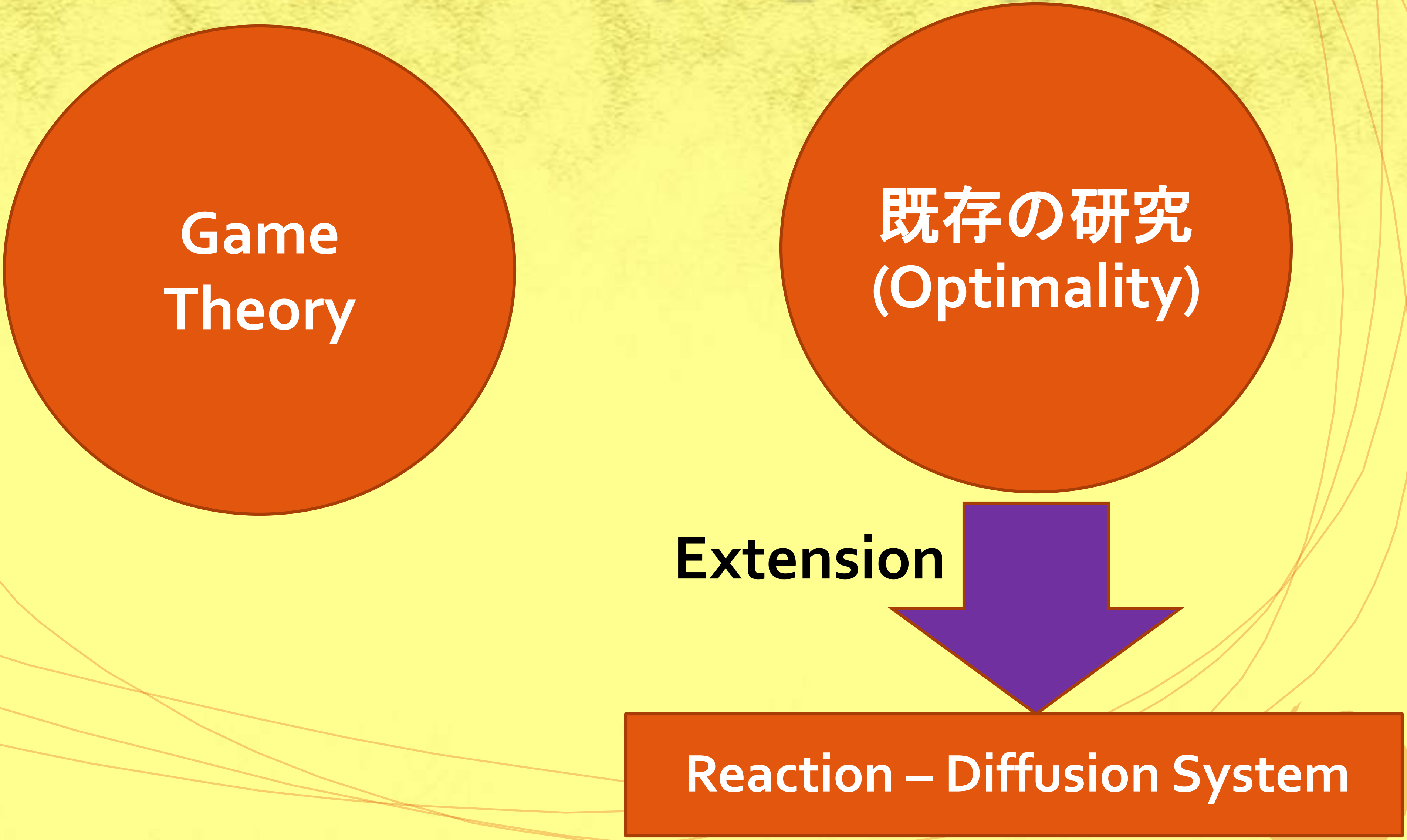


This Talk (Originality)

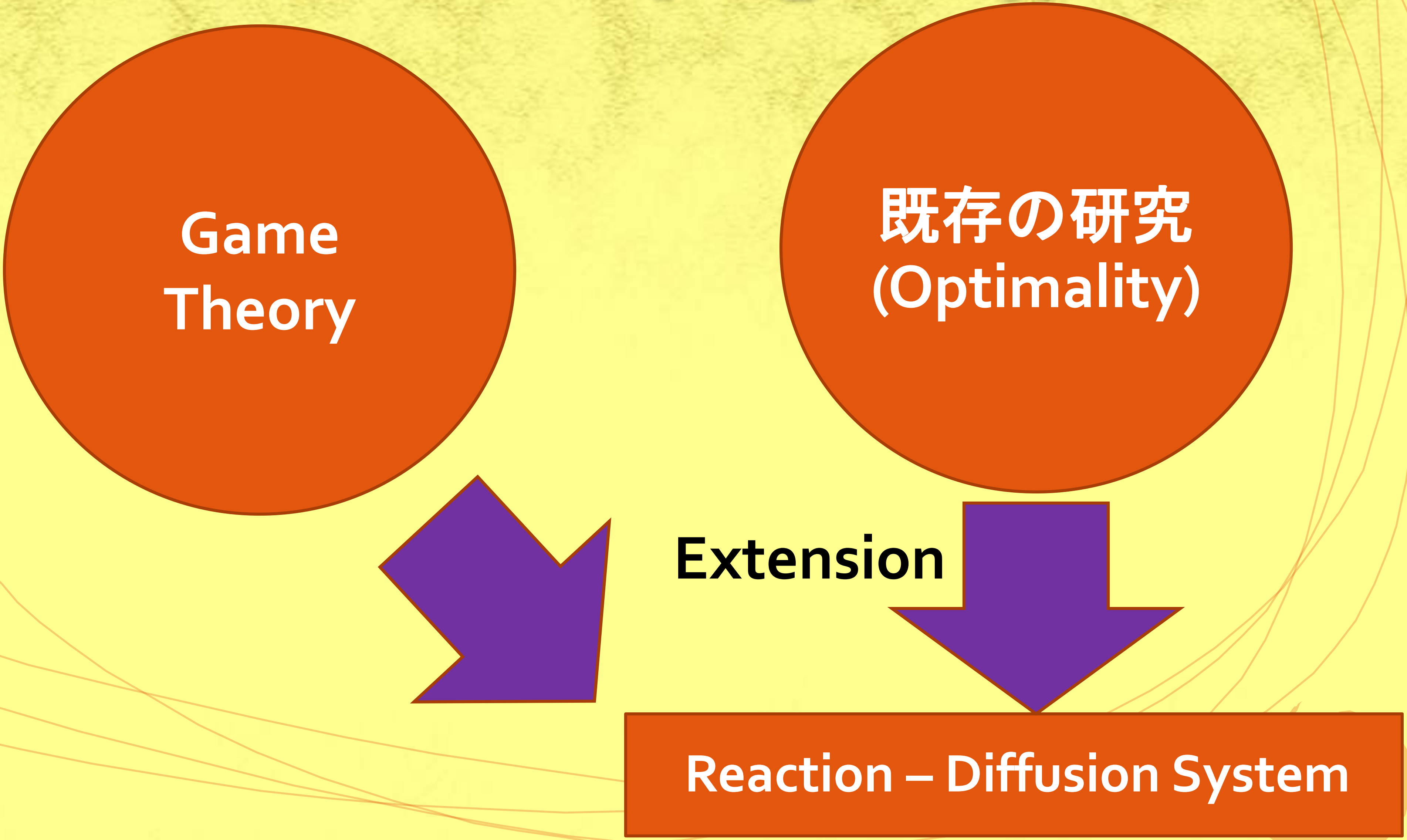


We can understand the players' action behavior.

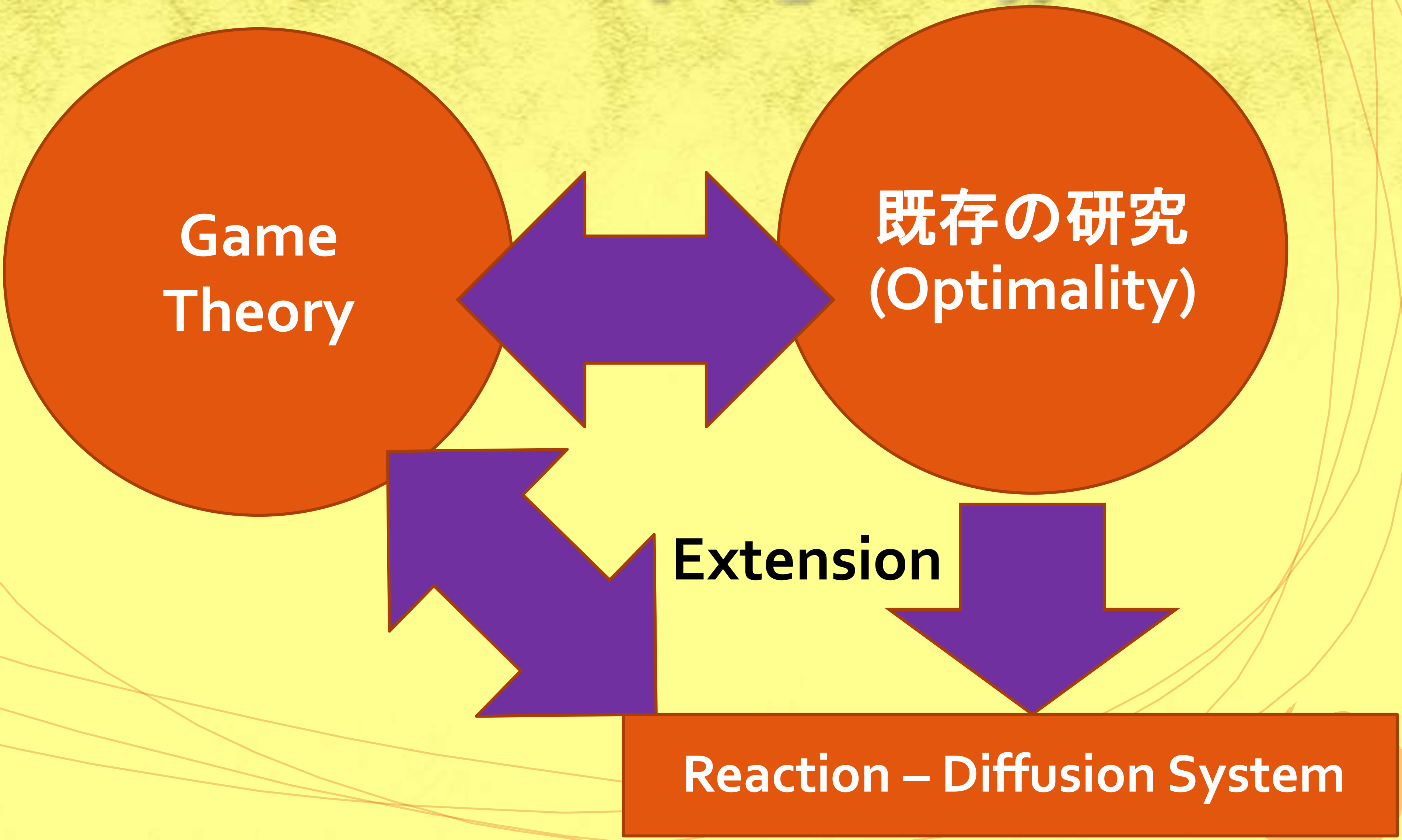
This Talk (Originality)



This Talk (Originality)



This Talk (Originality)



OUR CONTRIBUTION

- 行使価格K(既存の研究)

  → (平均行使価格)

- 理由：オプション市場も自らの予想のみならず、他者の影響があるのでは？

- これを説明するモデリング・分析(ゲーム理論)

- 非線形偏微分方程式

OUR CONTRIBUTION

- 行使価格K(既存の研究)
  → $\overline{K}$ (平均行使価格)
- 理由：オプション市場も自らの予想のみならず、他者の影響があるのでは？
- これを説明するモデリング・分析(ゲーム理論)
- 非線形偏微分方程式

OUR CONTRIBUTION

- 行使価格K(既存の研究)
  → $\overline{K}$ (平均行使価格)
- 理由：オプション市場も自らの予想のみならず、他者の影響があるのでは？
- これを説明するモデリング・分析(ゲーム理論)
- 非線形偏微分方程式

OUR CONTRIBUTION

- 行使価格K(既存の研究)
  → $\overline{K}$ (平均行使価格)
- 理由：オプション市場も自らの予想のみならず、他者の影響があるのでは？
- これを説明するモデリング・分析(ゲーム理論)
- 非線形偏微分方程式

問題意識 (Price formation)

Q. 株が上がる・下がるのは分かるか？

A. (長期的なトレンド)**YES**.

(ファイナンスの仮定では**NO**)

- **経済学**：価格は需要と供給により決定(Micro)。　例)BRISCが伸びるなど。

  需要＞供給→価格↑, 需要＜供給→価格↓

  美人投票(Keynes)

＋ 近年では制度的な要因も(例: ライブドアの事件)。

- **ファイナンス**：Brown運動 (random walk)

問題意識 (Price formation)

Q. 株が上がる・下がるのは分かるか？

A. (長期的なトレンド)**YES**.

(ファイナンスの仮定では**NO**)

- **経済学**：価格は需要と供給により決定(Micro)。　例)BRISCが伸びるなど。
  需要＞供給→価格↑, 需要＜供給→価格↓
  美人投票(Keynes)

＋ 近年では制度的な要因も(例: ライブドアの事件)。

- **ファイナンス**：Brown運動 (random walk)

問題意識 (Price formation)

Q. 株が上がる・下がるのは分かるか？

A. (長期的なトレンド)**YES**.

(ファイナンスの仮定では**NO**)

- **経済学**：価格は需要と供給により決定(Micro)。　例)BRISCが伸びるなど。

  需要＞供給→価格↑, 需要＜供給→価格↓

  美人投票(Keynes)

＋ 近年では制度的な要因も(例: ライブドアの事件)。

- **ファイナンス**：Brown運動 (random walk)

問題意識 (Price formation)

Q. 株が上がる・下がるのは分かるか？

A. (長期的なトレンド)**YES**.

(ファイナンスの仮定では**NO**)

- **経済学**：価格は需要と供給により決定(Micro)。　例)**BRISC**が伸びるなど。

需要＞供給→価格↑, 需要＜供給→価格↓

美人投票(Keynes)

＋ 近年では制度的な要因も(例: ライブドアの事件)。

- **ファイナンス**：Brown運動 (random walk)

問題意識 (Price formation)

Q. 株が上がる・下がるのは分かるか？

A. (長期的なトレンド)**YES**.

(ファイナンスの仮定では**NO**)

- **経済学**：価格は需要と供給により決定(Micro)。 例)**BRISC**が伸びるなど。

需要＞供給→価格↑, 需要＜供給→価格↓

美人投票(Keynes)

＋ 近年では制度的な要因も(例: ライブドアの事件)。

- **ファイナンス**：Brown運動 (random walk)

問題意識 (Price formation)

Q. 株が上がる・下がるのは分かるか？

A. (長期的なトレンド)**YES**.

(ファイナンスの仮定では**NO**)

- **経済学**：価格は需要と供給により決定(Micro)。　例)BRISCが伸びるなど。

需要＞供給→価格↑, 需要＜供給→価格↓

美人投票(Keynes)

＋ 近年では制度的な要因も(例: ライブドアの事件)。

- **ファイナンス**：Brown運動 (random walk)

問題意識(サブプライム問題)

- **「地価は上がり続ける」**を前提に様々な金融商品を開発・販売。
  - 地価は上がる→仮に債務者がデフォルトしても、その土地を売れば、元本は保証される。
- しかし実際には不動産市場には売り手と買い手が存在する。仮に売り手(供給)が多く、買い手(需要)が少なくなれば、不動産価格は低下する。→矛盾。
- よって「地価は上がり続ける」という前提は間違いであり、下がり始めたら、全てが破滅へ。

- また**「株価は幾何ブラウン運動で動いている」**という前提もまたかなり現実からかけ離れている。
- そこで売り手と買い手の行動から考えよう。
  - （ただし株価はブラウン運動の前提の下で。）

問題意識(サブプライム問題)

「地価は上がり続ける」を前提に様々な金融商品を開発・販売。

地価は上がる→仮に債務者がデフォルトしても、その土地を売れば、元本は保証される。

しかし実際には不動産市場には売り手と買い手が存在する。仮に売り手(供給)が多く、買い手(需要)が少なくなれば、不動産価格は低下する。→矛盾。

よって「地価は上がり続ける」という前提は間違いであり、下がり始めたら、全てが破滅へ。

また**「株価は幾何ブラウン運動で動いている」**という前提もまたかなり現実からかけ離れている。

そこで売り手と買い手の行動から考えよう。

（ただし株価はブラウン運動の前提の下で。）

問題意識(サブプライム問題)

「**地価は上がり続ける**」を前提に様々な金融商品を開発・販売。

地価は上がる→仮に債務者がデフォルトしても、その土地を売れば、元本は保証される。

しかし実際には不動産市場には売り手と買い手が存在する。仮に売り手(供給)が多く、買い手(需要)が少なくなれば、不動産価格は低下する。→矛盾。

よって「地価は上がり続ける」という前提は間違いであり、下がり始めたら、全てが破滅へ。

また「**株価は幾何ブラウン運動で動いている**」という前提もまたかなり現実からかけ離れている。

そこで売り手と買い手の行動から考えよう。

（ただし株価はブラウン運動の前提の下で。）

問題意識(サブプライム問題)

- **「地価は上がり続ける」**を前提に様々な金融商品を開発・販売。
  - 地価は上がる→仮に債務者がデフォルトしても、その土地を売れば、元本は保証される。
- しかし実際には不動産市場には売り手と買い手が存在する。仮に売り手(供給)が多く、買い手(需要)が少なくなれば、不動産価格は低下する。→矛盾。
- よって「地価は上がり続ける」という前提は間違いであり、下がり始めたら、全てが破滅へ。

また**「株価は幾何ブラウン運動で動いている」**という前提もまたかなり現実からかけ離れている。

そこで売り手と買い手の行動から考えよう。

（ただし株価はブラウン運動の前提の下で。）

余談: 株価がブラウン運動の場合

- ある株式 X の売買を考察

(短期市場は、Brown運動に近い動きをしていると報告されている。)

最適な投資方法：

1. 株式 X のある期間(1年、2年)の間の平均株価 $\underline{S}$ を求める。

2. $\underline{S}$ ＞ S(現在の株価) → 「買う」、
   $\underline{S}$ ＜ S(現在の株価) → 「売り」

余談: 株価がブラウン運動の場合

- ある株式 *X* の売買を考察

(短期市場は、Brown運動に近い動きをしていると報告されている。)

最適な投資方法：

1. 株式 *X* のある期間(1年、2年)の間の平均株価 <u>S</u> を求める。
2. <u>S</u> ＞ S(現在の株価) → 「**買う**」、<u>S</u> ＜ S(現在の株価) → 「**売り**」

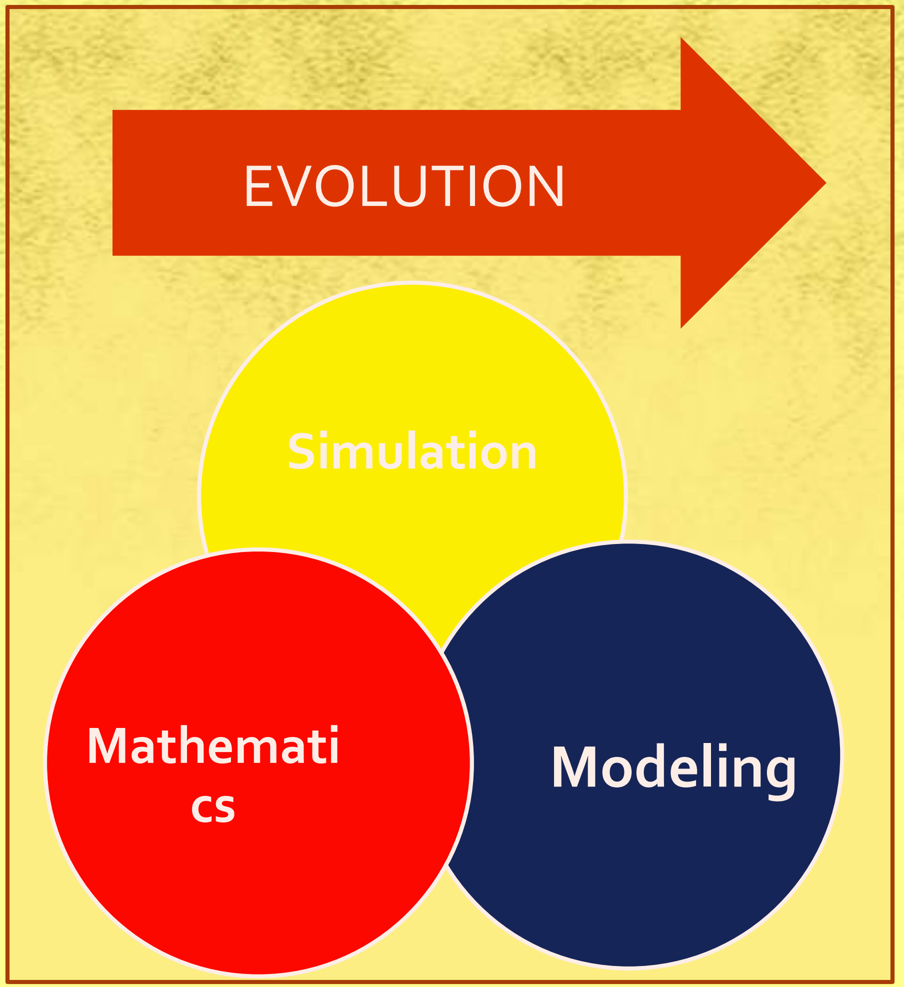
この投資法の問題点

→平均株価<u>S</u>の決定法。

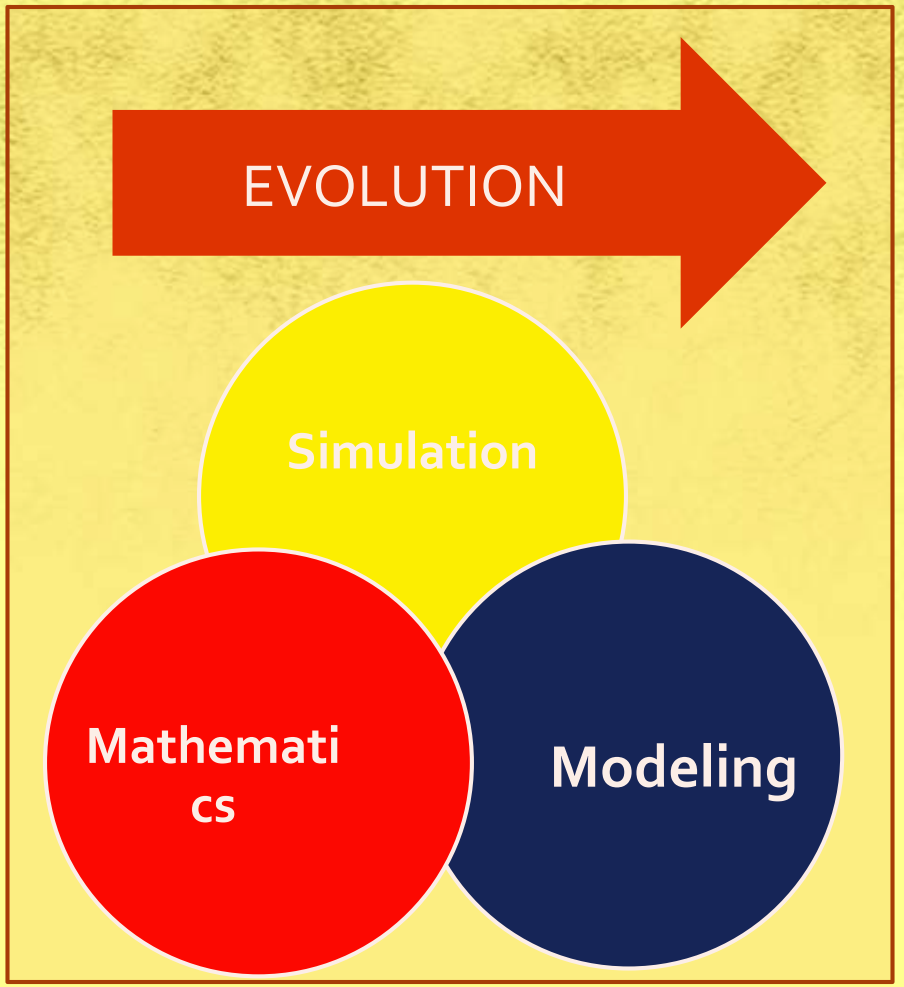
株価：10年間の平均≠1年間の平均

さて

PHENOMENON



PHEN
OMEN
ON



PHEN
OMEN
ON

MITSURU KIKKAWA

http://kikkawa.cyber-ninja.jp/index.htm

明治大学
グローバルCOEプログラム
現象数理学の形成と発展

Mathematical Finance

Mathematics

= 確率論(Probability Theory), 偏微分方程式(PDE), 最適化(Optimal Theory), 統計学(Statistics).

Modeling

= 理論経済学(Economics).

Simulation

= 実証(Economics).

Mathematical Finance

Mathe matics

= 確率論(Probability Theory), 偏微分方程式(PDE), 最適化 (Optimal Theory), 統計学 (Statistics).

Modeling

= 理論経済学 (Economics).

Simula tion

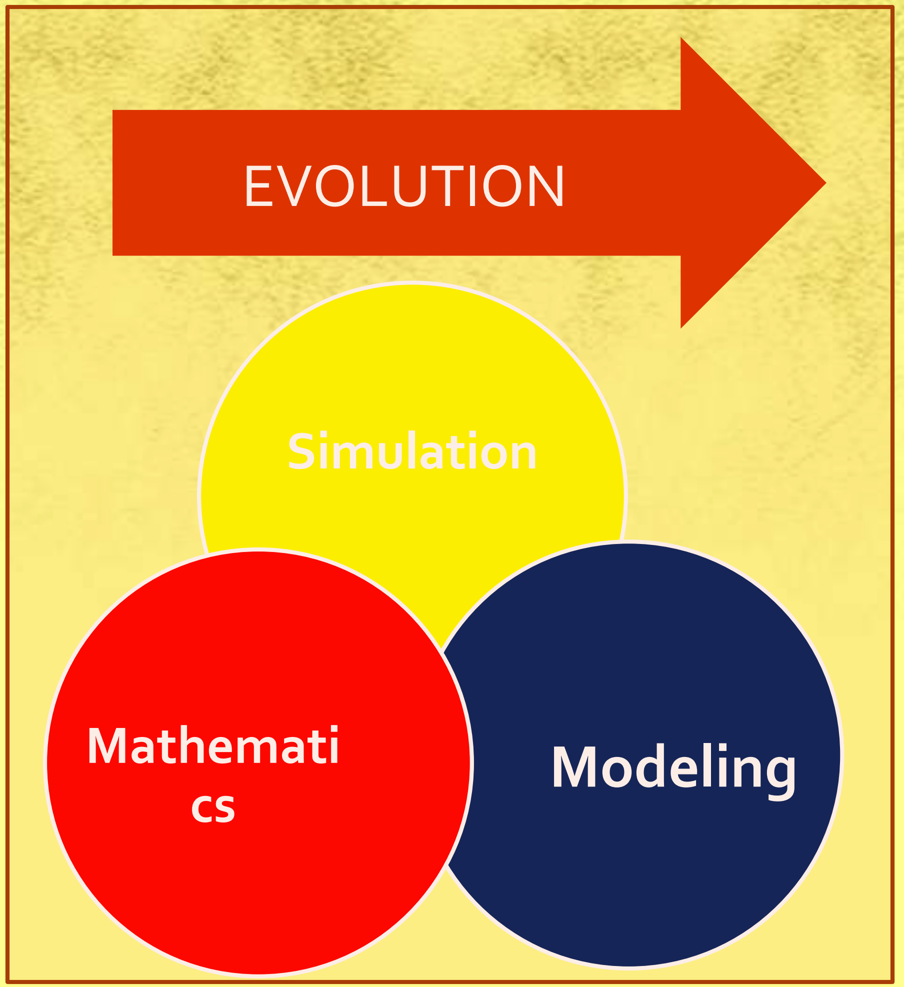
= 実証(Economics).

Mathematical Finance

Mathematics = 確率論(Probability Theory), 偏微分方程式(PDE), 最適化 (Optimal Theory), 統計学 (Statistics).

Modeling = 理論経済学 (Economics).

Simulation = 実証(Economics).



PHEN
OMEN
ON

MITSURU KIKKAWA

http://kikkawa.cyber-ninja.jp/index.htm

Journal

理論経済学総合雑誌

- Econometrica
- Journal of Economic Theory

ファイナンス専門雑誌(TOP Journals)

- Journal of Finance
- Journal of Financial Economics
- Review of Financial Studies
- など多数。

Nobel Prize

- 1997 Robert C. Merton, Myron S. Scholes

"for a new method to determine the value of derivatives"

- 2003 Robert F. Engle III

"for methods of analyzing economic time series with time-varying volatility (ARCH)"

- Clive W.J. Granger

"for methods of analyzing economic time series with common trends (cointegration)"

R.C.Merton

M.S.Scholes

R.F.Engle

C.W.Granger

Nobel Prize

- 1997 Robert C. Merton, Myron S. Scholes

"for a new method to determine the value of derivatives"

- 2003 Robert F. Engle III

"for methods of analyzing economic time series with time-varying volatility (ARCH)"

- Clive W.J. Granger

"for methods of analyzing economic time series with common trends (cointegration)"

R.C.Merton

M.S.Scholes

R.F.Engle

C.W.Granger

近年の学問のキーワード

- １．文理融合・学際性

→実際、現実に直面した時、理系、文系関係なく、幅広い知識が必要。

→学問(数学、物理学、情報学、工学、経済学、経営学、法律など)はもとより学問以外も必要。

- ２．産学官の連携

→大学の競争、生き残り、外部資金の獲得。

→社会人大学院

→企業との共同研究

→冠講座

- →ファイナンスは両方の性質を有する。

近年の学問のキーワード

- **１．文理融合・学際性**

→実際、現実に直面した時、理系、文系関係なく、幅広い知識が必要。

→学問(数学、物理学、情報学、工学、経済学、経営学、法律など)はもとより学問以外も必要。

- **２．産学官の連携**

→大学の競争、生き残り、外部資金の獲得。

→社会人大学院

→企業との共同研究

→冠講座

- →ファイナンスは両方の性質を有する。

近年の学問のキーワード

- １．文理融合・学際性

→実際、現実に直面した時、理系、文系関係なく、幅広い知識が必要。

→学問(数学、物理学、情報学、工学、経済学、経営学、法律など)はもとより学問以外も必要。

- ２．産学官の連携

→大学の競争、生き残り、外部資金の獲得。

→社会人大学院

→企業との共同研究

→冠講座

- →ファイナンスは両方の性質を有する。

研究機関

- 東大：金融教育研究センター, 数学科のアクチュアリープログラム
- 一橋大： 金融工学教育センター, 商学部　など
- 東工大：理財工学研究センター
- 首都東京大： ビジネススクール
- 横浜国立大：経済・工学連携の金融プログラム
- 京大：経済, 金融工学研究センター
- 阪大 ：CSFI,(VOLATILITY INDEX JAPAN (VXJ))
- 滋賀大：リスク研究センター
- 早大 ：ファイナンス研究科
- 立命館大：ファイナンス研究センター
- 明治大 ：数理ビジネス, グローバル・ビジネス研究科
- 日本大：文理学部

など多数で盛んに研究されている。

学会

- 数学関連： 日本数学会,応用数理学会 , OR学会
- 物理学関連:日本物理学会
- 経済学関連： 日本経済学会,日本金融学会, 進化経済学会 ,行動経済学会
- 金融工学, ファイナンス関連： 日本金融・証券計量・工学学会 ,日本不動産金融工学学会 ,日本ファイナンス学会,日本リアルオプション学会, 日本年金・年金リスク学会
- 経営学関連： 日本経営財務研究学会, 日本経営工学会 ,証券経済学会
- 情報学関連： 人工知能学会

など。

2. BLACK-SHOLES MODEL

OPTION

- **オプション(option)** とは売買を行う権利のことであり、買い付ける権利を**コール(call)**、売り付ける権利を**プット(put)**と言います。
- 日本で取引されている株価指数オプションには、**日経225オプション**、**日経300オプション**(大阪証券取引所)、**TOPIXオプション**(東京証券取引所)。

[DATA] 大阪証券取引所日報

http://www.nippo.ose.or.jp/pdf.html

- **Black-Sholesの公式**・・・ヨーロピアン・オプションの価格評価公式

OPTION

- **オプション(option)** とは売買を行う権利のことであり、買い付ける権利を**コール(call)**、売り付ける権利を**プット(put)**と言います。
- 日本で取引されている株価指数オプションには、**日経225オプション、日経300オプション**(大阪証券取引所)、**TOPIXオプション**(東京証券取引所)。

[DATA] 大阪証券取引所日報

http://www.nippo.ose.or.jp/pdf.html

- **Black-Sholesの公式・・・ヨーロピアン・オプションの価格評価公式**

OPTION

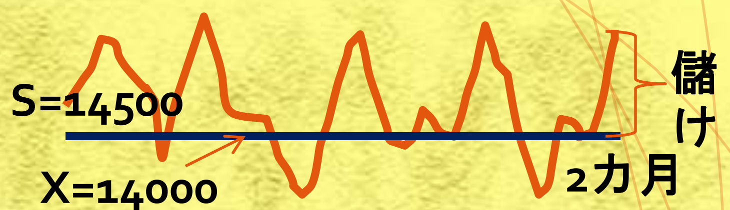
- **オプション(option)** とは売買を行う権利のことであり、買い付ける権利を**コール(call)**、売り付ける権利を**プット(put)**と言います。
- 日本で取引されている株価指数オプションには、**日経225オプション、日経300オプション**(大阪証券取引所)、**TOPIXオプション**(東京証券取引所)。

[DATA] 大阪証券取引所日報

http://www.nippo.ose.or.jp/pdf.html

- **Black-Sholesの公式**・・・ヨーロピアン・オプションの価格評価公式

PROBLEM

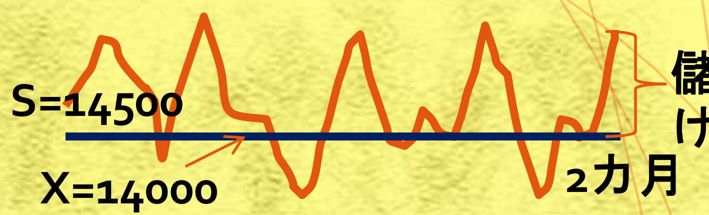


- 次のヨーロピアン・コールオプションの価格を求めよ。

  現在の株価 S=14500円, 権利行使価格 K=14000円, オプションの期間=2カ月, ボラティリティ σ =38%, 非危険利子率 r=6%

→あなたは上記の条件でいくら支払い購入する権利をするのか？

PROBLEM



- 次のヨーロピアン・コールオプションの価格を求めよ。

  現在の株価 S=14500円, 権利行使価格 K=14000円, オプションの期間=2カ月, ボラティリティ σ =38%, 非危険利子率 r=6%

→あなたは上記の条件でいくら支払い購入する権利をするのか？

SOLUTION.

- **Black-Sholes Formula**

$$f(S,t) = S \cdot N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}} + \sigma\sqrt{x}\right) - K \cdot \exp(-rx) \cdot N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}\right).$$

- オプションの期間 T-t=2/12=0.1667
- u=log(S/K)+(r-σ²/2)(T-t)=0.0331
- u/σ√x+σ√x=0.3685, u/σ√x=0.2133.
- 標準正規分布の数表から
- N(u/σ√x+σ√x)=0.6437, N(u/σ√x)=0.5845.
- 以上から, ヨーロピアンコールオプション価格は　f(S,t)=14500×0.6437-14000×exp(-0.06×0.1667)×0.5845 = **1232.0884**円

⇒2ヶ月後の株価＞**15232**円「儲け」

＜「損」

SOLUTION.

- Black-Sholes Formula

$$f(S,t) = S \cdot N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}} + \sigma\sqrt{x}\right) - K \cdot \exp(-rx) \cdot N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}\right).$$

- オプションの期間 T-t=2/12=0.1667
- u=log(S/K)+(r-σ²/2)(T-t)=0.0331
- u/σ√x+σ√x=0.3685, u/σ√x=0.2133.
- 標準正規分布の数表から
- N(u/σ√x+σ√x)=0.6437, N(u/σ√x)=0.5845.
- 以上から, ヨーロピアンコールオプション価格は　f(S,t)=14500×0.6437-14000×exp(-0.06×0.1667)×0.5845 = **1232.0884**円

⇒2ヶ月後の株価＞**15232**円「儲け」
＜　　　　「損」

SOLUTION.

- **Black-Sholes Formula**

$$f(S,t) = S \cdot N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}} + \sigma\sqrt{x}\right) - K \cdot \exp(-rx) \cdot N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}\right).$$

- オプションの期間 T-t=2/12=0.1667
- $u=\log(S/K)+(r-\sigma^2/2)(T-t)=0.0331$
- $u/\sigma\sqrt{x}+\sigma\sqrt{x}=0.3685$, $u/\sigma\sqrt{x}=0.2133$.
- 標準正規分布の数表から
- $N(u/\sigma\sqrt{x}+\sigma\sqrt{x})=0.6437$, $N(u/\sigma\sqrt{x})=0.5845$.
- 以上から, ヨーロピアンコールオプション価格は　f(S,t)=14500×0.6437-14000×exp(-0.06×0.1667)×0.5845 = **1232.0884**円

⇒2ヶ月後の株価 ＞ **15232**円「儲け」
＜ 「損」

このボラティリティが厄介

- どのようにしてボラティリティを測るのか？
- この問題で**ARCH, GARCH** など開発（ノーベル賞(2003)）。
- **インプライドボラティリティ**(データからボラティリティを逆算)
- ちなみに大阪大学ではこのボラティリティを公開している。

阪大：CSFI,(**VOLATILITY INDEX JAPAN (VXJ)**)

- この**ボラティリティ**を内生化したりとこの項を修正する方向や**金利**を一定ではなく期間構造を持つものなどの研究が進んでいる。

以上までがお話でした。
これからは数学。

Model Setteing

- 確率空間(Ω, F, P)
- 財：危険資産(株価など)と安全資産(国債など)
- 危険資産は**幾何ブラウン運動**:

$$dS(t) = \mu S(t)\,dt + \sigma S(t)\,dZ(t), \qquad (2.1)$$

μ: 期待収益率, σ : 株価ボラティリティ, Z(t)=Z(t,ω), (ω∈Ω), ブラウン運動

伊藤の補題

xを伊藤過程で dx(t)=a(x,t)dt + b(x,t)dZ(t) とし, F: R²→R を2回連続可微分な関数であるとする. このとき, Y(t)=F(x(t),t) によって定義される過程Yもまた伊藤過程となり,

$$dY(t) = \left(\frac{\partial F}{\partial x} a + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial F}{\partial x} bZ(t)$$

PROOF: 2変数のTaylor展開+確率論の知識

- 伊藤の補題から株価Sによる派生証券の価格 f(S,t)の微分 dfは次に従う.

$$df = \left\{ \frac{\partial f}{\partial S} \cdot \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \cdot \sigma^2 S^2 \right\} dt + \frac{\partial f}{\partial S} \cdot \sigma S \cdot dZ$$

(2.2)

定義

- **ポートフォリオ(portfolio)**とはいくつかの株式, 債権, 通貨などの資産 W_1, W_2, …, W_p の組み合わせのことをいう. 　時点tにおける資産の価格, 保有する資産の単位数をそれぞれ $W_i(t)$, $n_i(t)$, $i=1,\ldots,p$ とする. このときポートフォリオの価値 $W(t)$は次を得る.

(2.3)

$$W(t)=n_1(t)W_1(t)+n_2(t)W_2(t)+\ldots+n_p(t)W_p(t).$$

確率的な要素を消したい。

- ここで株価Sの株式を∂f/∂S 単位買い, 価格f(S,t) の派生証券を1単位売るとする. このときのポートフォリオの価値は次を得る.

(2.4)
$$\frac{\partial f}{\partial S}\cdot S - f(S,t).$$

- (2.1), (2.4) を (2.2) に代入し、整理すると

(2.5)

確率的な要素を消したい。

- ここで株価Sの株式を∂f/∂S 単位買い, 価格f(S,t) の派生証券を1単位売るとする. このときのポートフォリオの価値は次を得る.

(2.4) $$\frac{\partial f}{\partial S}\cdot S - f(S,t).$$

- (2.1), (2.4) を (2.2) に代入し、整理すると

(2.5) $$\frac{\partial f}{\partial S}\cdot \Delta S - \Delta f = \left\{-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\cdot \sigma^2 S^2\right\}\cdot \Delta t.$$

仮定3: 裁定機会は存在しない

- ここでこの仮定から安全資産の利子率をrとすると, 次が成り立つ.

(2.6) $$\frac{\partial f}{\partial S}\cdot \Delta S - \Delta f = r\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial S} - f(S,t)\right)\Delta t.$$

- (2.5), (2.6) から, 次が得られる.

(2.7)

境界条件

(2.7) : **Black-Sholes の偏微分方程式**

仮定3: 裁定機会は存在しない

- ここでこの仮定から安全資産の利子率をrとすると, 次が成り立つ.

(2.6)
$$\frac{\partial f}{\partial S}\cdot \Delta S-\Delta f=r\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial S}-f(S,t)\right)\Delta t.$$

- (2.5), (2.6) から, 次が得られる.

$$r\cdot f(S,t)=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\cdot\sigma^2 S^2+r\cdot\frac{\partial f}{\partial S}\cdot S,$$

(2.7)

境界条件 $f(S_T,T)=\begin{cases} S_T-K, & S_T\geq K, \\ 0, & S_T<K. \end{cases}$

(2.7) : **Black-Sholes の偏微分方程式**

あとはこの偏微分方程式を解くだけ。

- (2.7)を式変形すると、次の式を得る.

(2.8)
$$y_{uu}(u,\tau) = \frac{2}{\sigma^2} \cdot y_\tau(u,\tau),$$

境界条件
$$y(u,0) = \begin{cases} K \cdot (e^u - 1), & u \geq 0, \\ 0, & u < 0. \end{cases}$$

ただし

$$f(S,t) = e^{-r(T-t)} \cdot y(u,\tau), u = \log \frac{S}{K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}(T-t) \right), \tau = T - t$$

解くと,

(2.9)

Black-Sholesの(コール・オプション)の公式

あとはこの偏微分方程式を解くだけ。

- (2.7)を式変形すると、次の式を得る.

(2.8) $$y_{uu}(u,\tau)=\frac{2}{\sigma^2}\cdot y_\tau(u,\tau),$$

ただし　境界条件 $$y(u,0)=\begin{cases}K\cdot(e^u-1), & u\ge 0,\\ 0, & u<0.\end{cases}$$

$$f(S,t)=e^{-r(T-t)}\cdot y(u,\tau), u=\log\frac{S}{K}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)\right), \tau=T-t$$

解くと,

(2.9) $$f(S,t)=S\cdot N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{\tau}}+\sigma\sqrt{\tau}\right)-K\cdot e^{-r\tau}\cdot N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{\tau}}\right).$$

Black-Sholesの(コール・オプション)の公式

別法 (なかなか使える)

- Feynman-Kacの定理

関数 μ(t,x), σ(t,x)に対して, 次の偏微分方程式を考える.

$$(*)\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u(t,x)+\mu(t,x)\dfrac{\partial}{\partial x}u(t,x)+\dfrac{1}{2}\sigma^2(t,x)\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x)-ru(t,x)=0, \\ u(T,x)=\Phi(x). \end{cases}$$

このとき

$$\begin{cases} dX_t=\mu(t,X_t)dt+\sigma(t,X_t)dB_t, \\ X_t=x, \end{cases}$$

の解をX_tとする. $\sigma(t,X_t)\partial/\partial x\, u(t,x)\in L^2(F_t)$のとき,(*)の解は

$$u(t,x)=\exp[-r(T-t)]E_{t,x}\left[\Phi(X_T)\right]$$

で与えられる. ここで $E_{t,x}$は$X_t=x$となる確率過程$\{X_t\}$に関しての期待値とする.

比較静学

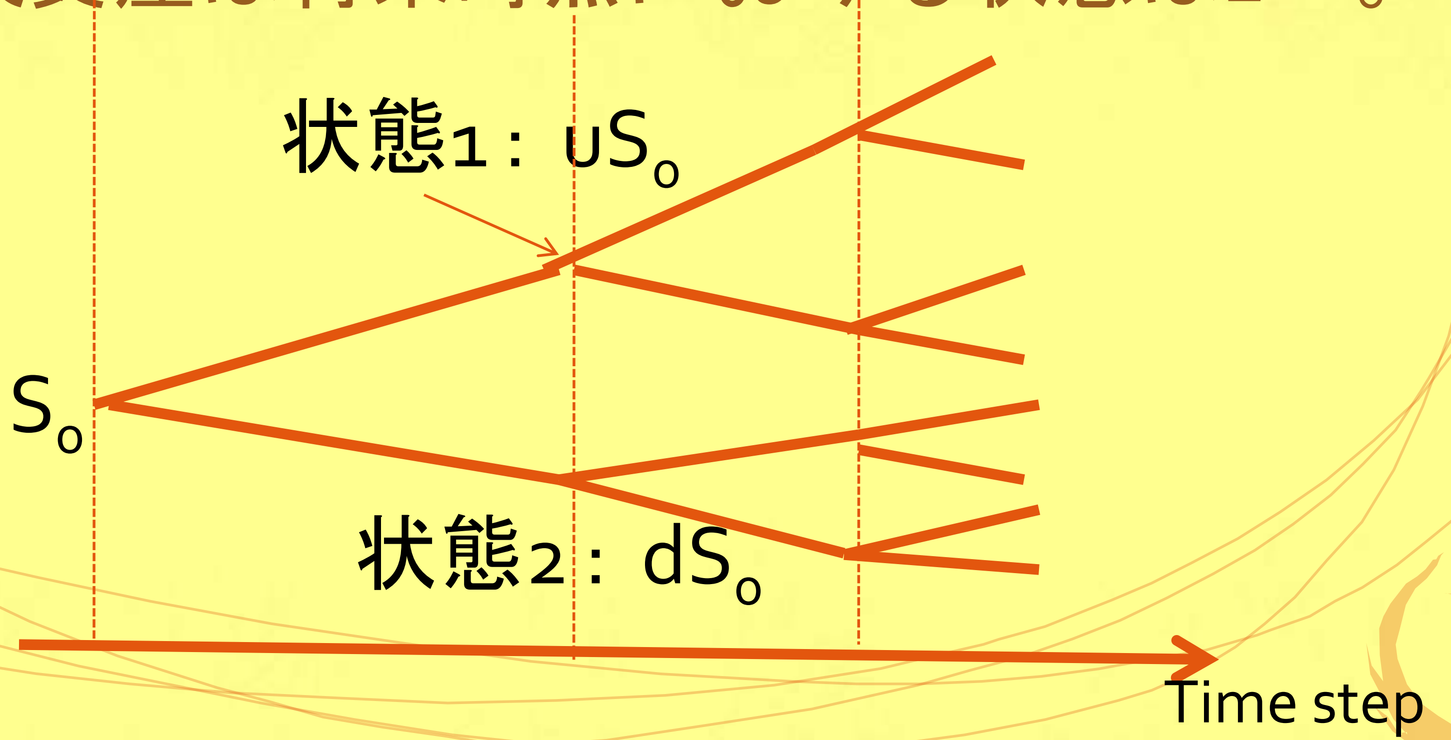
- 株価Sに関する導関数 $\Delta := \frac{\partial W}{\partial S} > 0$
- 株価に対する弾力性 $e_C = \frac{\partial C}{\partial S}\frac{S}{C} > 1$
- 行使価格に関する導関数 $\frac{\partial C}{\partial K} < 0$
- 利子率に関する導関数 $\rho := \frac{\partial W}{\partial r} > 0$
- 時間に関する導関数 $\Theta := \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial r} < 0$
- ボラティィリティに関する導関数 $Vega := \frac{\partial W}{\partial \sigma} > 0$
- 株価に関する2回導関数 $\Gamma := \frac{\partial^2 W}{\partial S^2} > 0$

2. BLACK-SHOLES MODEL

1. Introduction
2. Black-Sholes Model
   2.1 Continuous model
   2.2 Discrete model
3. Extended Black-Sholes Model
4. Game Theoretic Model
5. Summary

Model

- **離散時間**
- 財: 危険資産 (株価 S_0) と安全資産(価格 1)
- 危険資産は将来時点における状態は2つ。



仮定

- 無裁定条件が満たされるとする. そのため次を満たす.

(2.10)　　$0 < d < r < u.$

- 株価がn 時点において $S_0 u^k d^{m-k}$ となる確率は, ${}_nC_k\, p^k (1-p)^{n-k}$ であり, 2項分布に従う.

ただし株価が上昇する確率はpであり, その回数をkとする.

命題5

このモデルにおけるコール・オプション価格は極限的に,(2.9)に一致する.

(2.11) $$C = SB_a(n, p') - \frac{K}{r^n} B_a(n, p),$$

ただし $B_a(n, \tilde{p}) = \sum_{k=a}^{n} {}_nC_k \tilde{p}^{n-k} (1-\tilde{p})^k, \tilde{p} = \{p, p'\}, p = \frac{r-d}{u-d}, p' = \frac{up}{r},$

$$a = \left[\frac{\log \frac{K}{d^n S}}{\log \frac{u}{d}} \right] + 1,$$ [.] はガウス記号

Proof outline

- (2.11)と(2.9)を比較すると, 時間ステップを細かくする, つまり n→∞のとき, 次の3つが成り立てば, 両者は一致することになる.

  (1) $B_a(n,p')=N(x)$,   (2) $B_a(n,p)=N(x-\sigma\sqrt{t})$,

  (3) $r^{-n} = e^{-r\tau}$

ただし

$$x=\frac{\log\frac{S}{K}+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma\sqrt{t}}, N(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$$

3. EXTENDED BLACK-SHOLES MODEL

反応拡散系へ

- **連続時間**
- アイディア:「熱方程式→熱源がある熱方程式へ(非線形偏微分方程式)」

- 熱源→相互作用に関連した項。

- 株価：幾何ブラウン運動(先ほど同様)

ポートフォリオの変更

- **[想定している状況]**

投資家は複数の財を保有しており、考察している株式以外の状況によって投資家の行動が変化する場合.

- (2.5) は次のように変更される.

(2.5′)

ポートフォリオの変更

- **[想定している状況]**

投資家は複数の財を保有しており、考察している株式以外の状況によって投資家の行動が変化する場合.

- (2.5) は次のように変更される.

$$(2.5') \quad \frac{\partial f}{\partial S}\cdot\Delta S-\Delta f=\left\{-\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\cdot\sigma^2 S^2\right\}\cdot\Delta t+\underline{g(S)\cdot\Delta t}$$

このような状況の下で解く

- この場合先ほどの熱方程式は次のように変更される。

(2.8′) $$w_{uu}(u,x)=2w_x(u,x)+\underline{g(u,x)}$$

→非斉次の偏微分方程式(解の一意性など成り立つことが知られている)

基本解U(u,v,x)を用いて解を得る.

ただし

このような状況の下で解く

- この場合先ほどの熱方程式は次のように変更される。

(2.8′) $$w_{uu}(u,x)=2w_x(u,x)+\underline{g(u,x)}$$

→非斉次の偏微分方程式(解の一意性など成り立つことが知られている)

基本解U(u,v,x)を用いて解を得る.

$$w(u,\tau)=\int_\Omega U(u,v,\tau)w_0(v)dv+\underline{\int_0^\tau\int_\Omega U(u,v,\tau-s)g(v,s)dvds.}$$

ただし $U(u,v,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}\exp\left(-\frac{(u-v)^2}{2\tau}\right)$

このときのコール・オプションの公式

$$f(S,t) = S \cdot N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{\tau}} + \sigma\sqrt{\tau}\right) - K \cdot e^{-r\tau} \cdot N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) + \underline{G(S,t)}.$$

- ただし G(S,t)は非斉次の項に関する項

有名な非斉次の熱方程式

例6)

(i) $g(u,x)=(u-a)(1-u^2)$, $-1 < a < 1$, **Allen-Cahn 方程式**

(ii) $g(u,x) = |u|^{p-1} u$, $p>1$ ときの**解**の**爆発**について

(iii) ファイナンスにおける良い非斉次の項を見つけることも重要。

有名な非斉次の熱方程式

例6)

(i) $g(u,x)=(u-a)(1-u^2)$, $-1 < a < 1$, **Allen-Cahn 方程式**

(ii) $g(u,x) = |u|^{p-1} u$, $p>1$ ときの**解の爆発**について

(iii) ファイナンスにおける良い非斉次の項を見つけることも重要。

4. GAME THEORETIC MODEL

では売り手と買い手の行動から考えるとどのようなBLACK-SHOLESの公式が導かれるのか？

Model

- **連続時間**
- 危険資産: 幾何ブラウン運動
- 主体：売り手と買い手 (非対称2人ゲーム)
- δt の間に, 現在の株価を見て、自分と相手の利得を勘定し、自らの戦略を決定するということを行っている。
- 戦略：2つ。例：{bear, bull} など
- 利得：売り手：K(t)-S(t), 買い手: S(t)-K(t)
- →ゼロ＝サム型

- 利得表

	戦略1	戦略2
戦略1	a(t), -a(t)	0,0
戦略2	0, 0	b(t),-b(t)

- ↑の利得表は相対的な「利得差」を表している。

このときのReplicator 方程式

s_1を主体1が戦略1を採用する確率, s_2 を主体2が戦略2を採用する確率

- 利得表

	戦略1	戦略2
戦略1	a(t), -a(t)	0,0
戦略2	0, 0	b(t),-b(t)

- ↑の利得表は相対的な「利得差」を表している。

このときのReplicator 方程式

$$\dot{s}_1 = s_1(1-s_1)\{a(t)-(a(t)+b(t))s_2\},$$

$$\dot{s}_2 = s_2(1-s_2)\{-a(t)+(a(t)+b(t))s_1\},$$

s_1を主体1が戦略1を採用する確率, s_2 を主体2が戦略2を採用する確率

平衡点とその安定性

- このときの平衡点は純粋戦略の組み4つと、内点解(=混合戦略)の5つ存在する.

- ESSは内点解。

補題 ノイズがない場合の内点の安定性はリミットサイクルであり, またノイズがある場合もリミットサイクルである.

平衡点とその安定性

- このときの平衡点は純粋戦略の組み4つと、内点解(=混合戦略)の5つ存在する.

- ESSは内点解。

補題 ノイズがない場合の内点の安定性はリミットサイクルであり, またノイズがある場合もリミットサイクルである.

平衡点とその安定性

- このときの平衡点は純粋戦略の組み4つと、内点解(=混合戦略)の5つ存在する.

- ESSは内点解。

補題 ノイズがない場合の内点の安定性はリミットサイクルであり, またノイズがある場合もリミットサイクルである.

この場合のBlack-Sholesの公式

- 前に取り上げたBlack-Sholesモデルにおいて、行使価格の影響があるのは、境界条件を使用するとき。
- よって、K:= $\overline{K}$ とすればよい. つまり

$$f(S,t) = S \cdot N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{\tau}} + \sigma\sqrt{\tau}\right) - \overline{K} \cdot e^{-r\tau} \cdot N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{\tau}}\right).$$

ただし$\overline{K}$ ＝平衡時の戦略1における行使価格 $\cdot s_1^*$

+ 平衡時の戦略2における行使価格 $\cdot(1 - s_1^*)$

s_1^* は混合戦略を採用する場合の確率.

離散時間の場合

- 2項モデルを参考
- 危険資産：「上がる」 or「 下がる」
- 主体1が戦略1を採用する確率p″とし, それを採用する回数をkとすると, n ステップ後の戦略1を取る確率は $_nC_k\, p''^k (1-p'')^{n-k}$であり、このときの期待利得は $\left(\sum_{k=a}^{n} a(k) + \sum_{k\neq a}^{n-k} b(k)\right)\cdot$ $_nC_k\, p''^k (1-p'')^{n-k}$

注）通常進化ゲーム理論では、平衡状態のときに利得を得るとしているが、ここでは毎期ごとに利得を仮想的に得ることを考えている。

命題8

- このゲームにおけるコール・オプション価格は次のようになる。またこのときの各主体の期待利得は正規分布に従っている.

(4.3)
$$C = SB_a(n, p') - \frac{\overline{K}}{r^n} B_a(n, p),$$

$$B_a(n, \tilde{p}) = \sum_{k=a}^{n} {}_nC_k \tilde{p}^{n-k} (1-\tilde{p})^k, \tilde{p} = \{p, p'\}, p = \frac{r-d}{u-d}, p' = \frac{up}{r},$$

$$a = \left[\frac{\log \frac{\overline{K}}{d^n S}}{\log \frac{u}{d}} \right] + 1,$$

ただし$\overline{K}$ ＝平衡時の戦略1における行使価格$\cdot p''^{*}$ ＋ 平衡時の戦略2における行使価格$\cdot (1-p''^{*})$

p''^{*} は混合戦略を採用する場合の確率.

拡張モデル

- 前節(反応拡散系)と同様に株価間に影響がある場合。
- ここでは $p_1=p''-\varepsilon,\ p_2=p''+\varepsilon\ \ (\varepsilon\neq 0)$

命題9　コール・オプション価格は(4.3)に一致するが、またこのときの各主体の期待利得は正規分布に従わない.

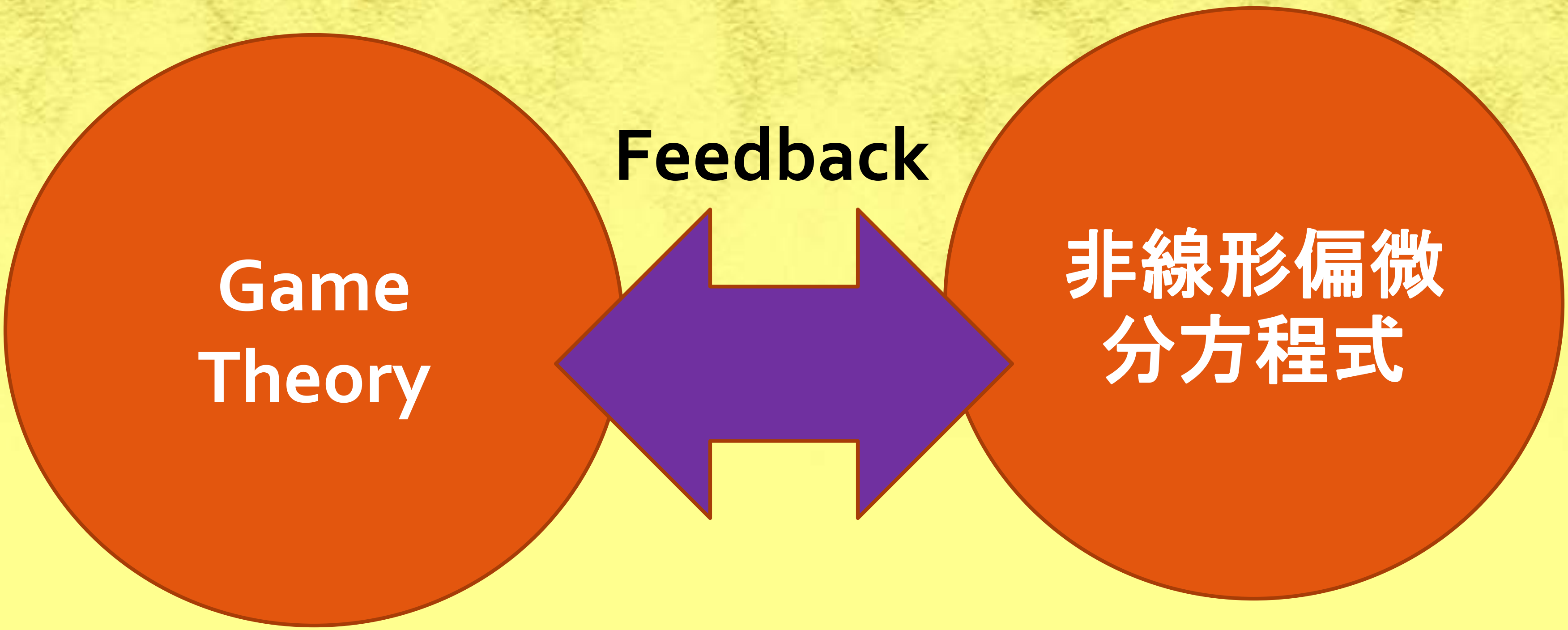
→**Fat Tail**

5. SUMMARY

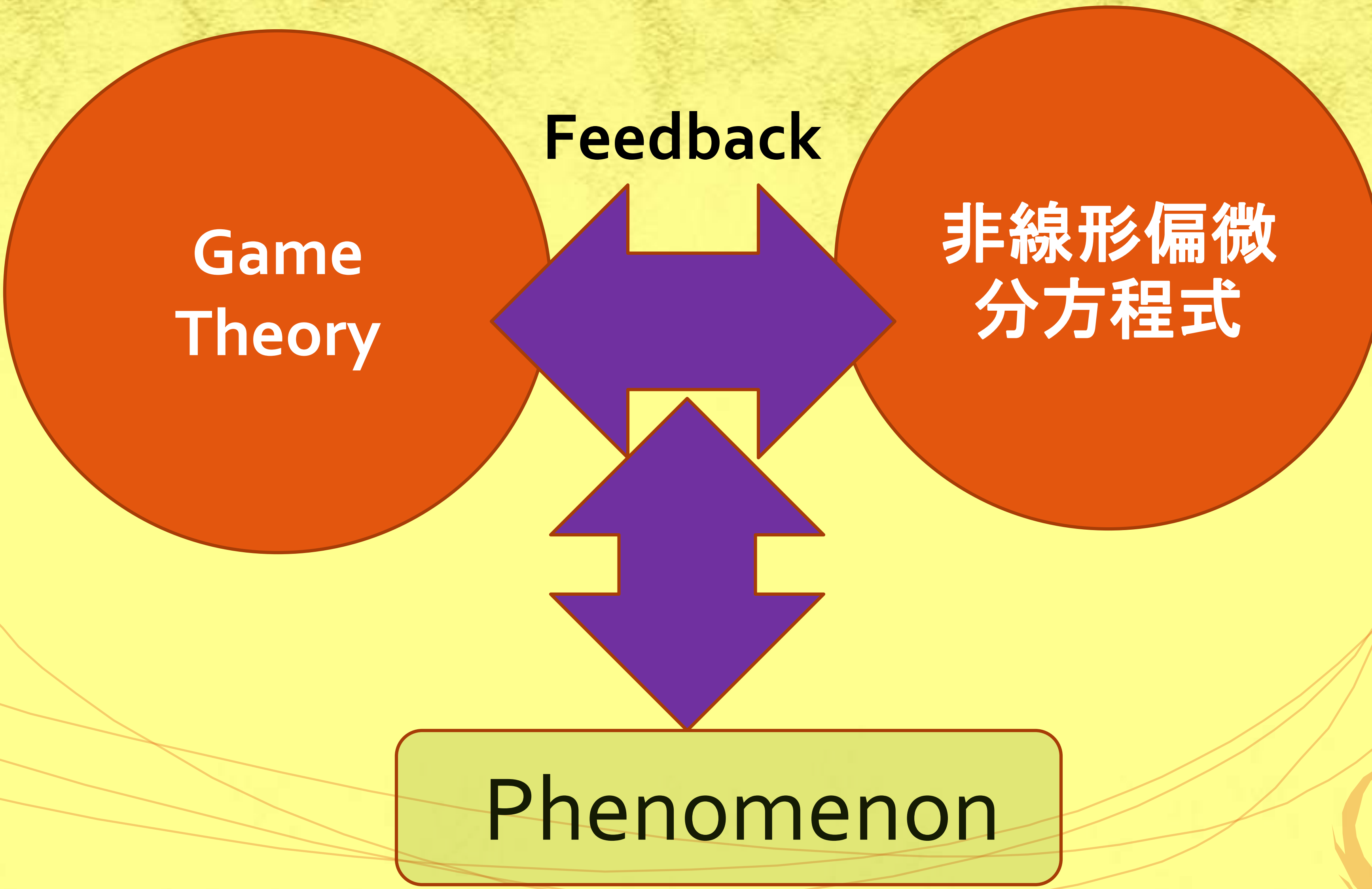
Summary

- 熱方程式に相互作用の項を導入すると、反応拡散系の議論となる。またそれを説明するミクロ的基礎付けのあるモデルを記述すると、ゲーム理論のフレームワークとなる。
- この分野においては、**「実際の現象と比較することによって、応用数学を純粋数学にすることが重要」**。それには**数学**だけではなく、**モデリング**、**シミュレーション**も必要。

Future Works.



Future Works.



FUTURE WORKS

- 非線形偏微分方程式の研究：

  非線形項による**「爆発」**の問題

Black-Sholes経済では、「Jump = Stop高」の概念を入れるのが難しかった。

- ゲーム理論の研究の方向：

  「リスクに対する態度(非線形効用関数)」

（行動ファイナンス）

REFERENCE

[1] Black, F. and Scholes, M. (1973): "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *The Journal of Political Economy*, Vol.**81**, pp.637-654.[PDF]

[2] Cox, John C., Ross, Stephen A. and Rubinstein, Mark (1979): "Option Pricing: A Simplified Approach," *Journal of Financial Economics*, Vol.**3**, pp.145-166. [PDF]

[3] 吉川 満 (2009): 「進化ゲーム理論における共進化と多様性 : 確率的環境の場合」『進化経済学論集』第**13**号, 印刷中. [PDF]

[4] 関根 順 (2007): 「数理ファイナンス」培風館.[AMAZON]

Thank you for your attention.

Mitsuru KIKKAWA (mitsurukikkawa@hotmail.co.jp)

This File is available at

http://kikkawa.cyber-ninja.jp/index.htm

余談: Smaleの問題

問題8. 経済理論への力学の導入

「価格調整を含むように一般均衡理論の数学的モデルを拡張せよ」

REF. G.Debreu : Theory of Value, Yale U.P.,1959. **[Amazon]**

S.Smale Dynamics in general equilibrium theory, *AER*, **66**(1976), 288-294.**[JSTOR]**

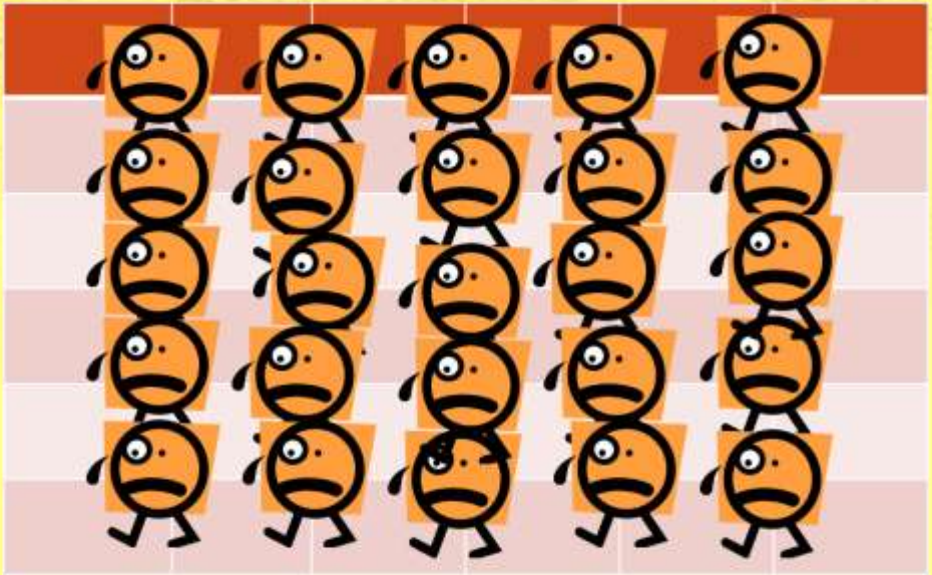
Journal of Mathematical EconomicsにSmaleの論文(数本)

(出典: Arnold, *et al.* 「数学の最先端 21世紀への挑戦, Vol.4」 2003.**[Amazon]**

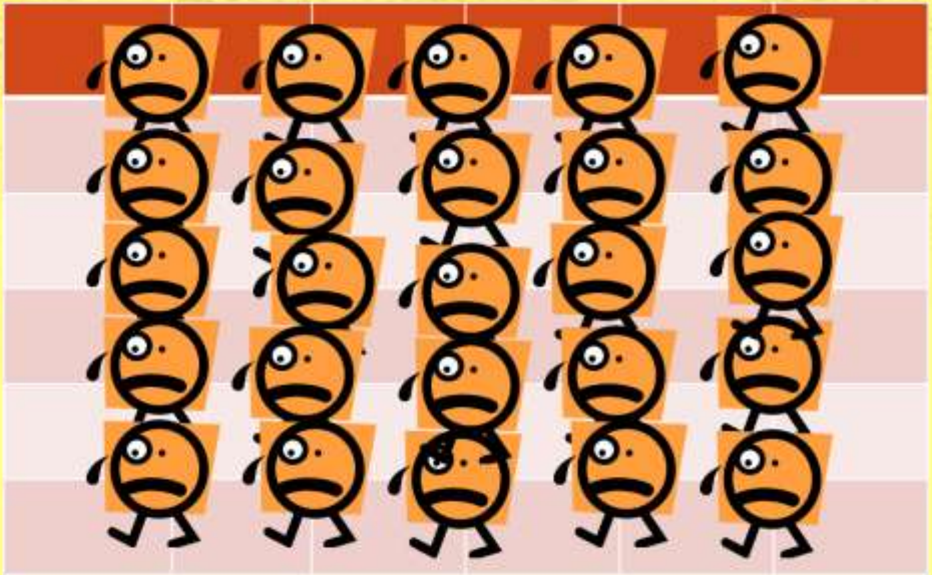
おまけ (EVOLUTIONARY GAME THEORY)

PRELIMINARIES

Situation (Traditional Evolutionary Game Theory)



Situation (Traditional Evolutionary Game Theory)



Another players look at the game.

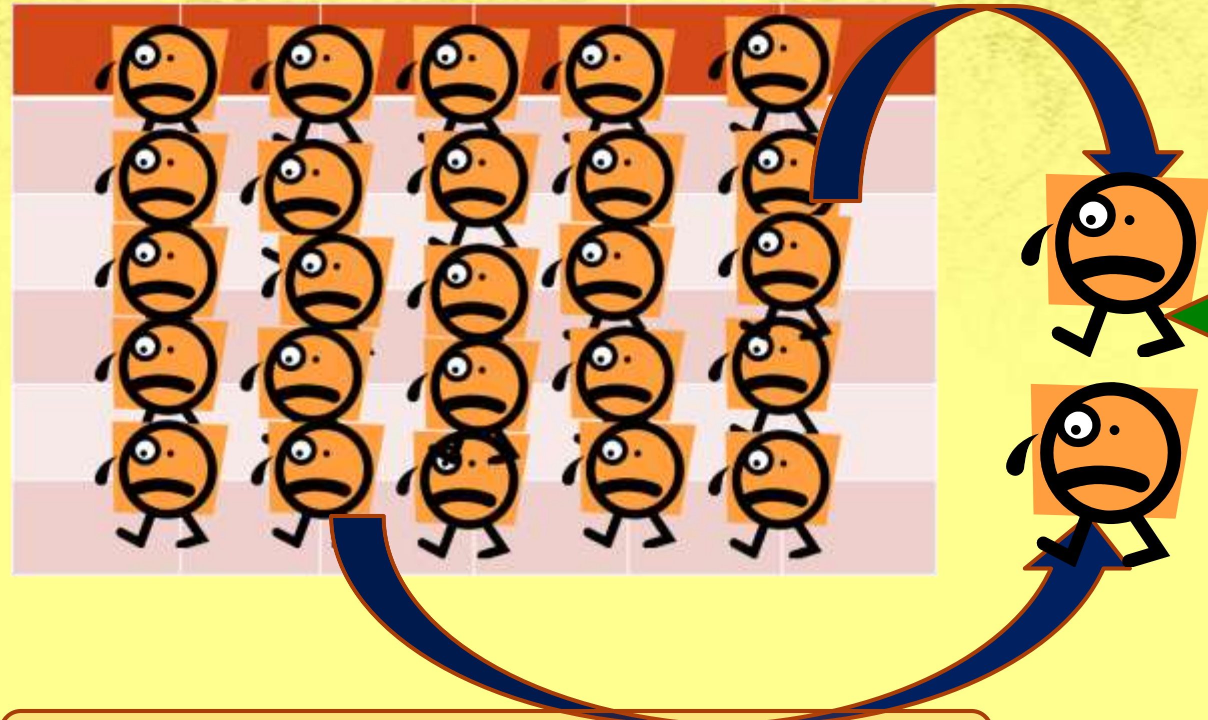
Situation (Traditional Evolutionary Game Theory)

At Random (infinitely)

Another players look at the game.

Situation (Traditional Evolutionary Game Theory)

At Random (infinitely)

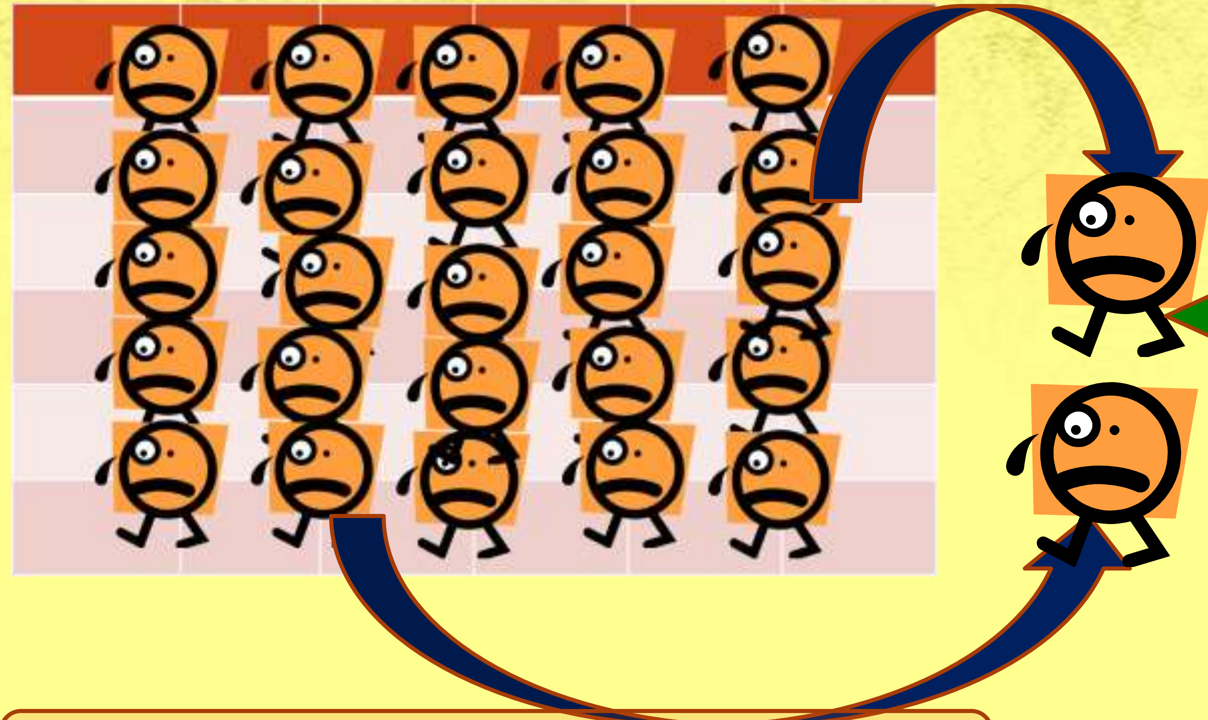


Play a game

Another players look at the game.

Situation (Traditional Evolutionary Game Theory)

At Random (infinitely)



Play a game

Another players look at the game.

Replicator Equation

REVIEW: Replicator Equation

REPLICATOR EQ. $$\dot{x}_i = x_i\left(\underline{(Ax)_i - x\cdot Ax}\right), i=1,\cdots,n.$$

If the player's payoff from the outcome *i* is greater than the expected utility *x Ax*, the probability of the action *i* is higher than before.

REVIEW: Replicator Equation

REPLICATOR EQ. $\dot{x}_i = \underline{x_i}\left((Ax)_i - x \cdot Ax\right), i = 1, \cdots, n.$

If the player's payoff from the outcome *i* is greater than the expected utility *x Ax*, the probability of the action *i* is higher than before. And this equation shows that the probability of the action *i* chosen by another players is also higher than before (**externality**).

REVIEW: Replicator Equation

REPLICATOR EQ. $\dot{x}_i = x_i\left((Ax)_i - x \cdot Ax\right), i = 1, \cdots, n.$

If the player's payoff from the outcome *i* is greater than the expected utility *x Ax*, the probability of the action *i* is higher than before. And this equation shows that the probability of the action *i* chosen by another players is also higher than before (**externality**). Furthermore, the equation is derived uniquely by the **monotonic** (that is if one type has increased its share in the population then all types with higher profit should also have increased their shares).

REVIEW: Replicator Equation

REPLICATOR EQ. $$\dot{x}_i = x_i\left((Ax)_i - x \cdot Ax\right), i = 1, \cdots, n.$$

If the player's payoff from the outcome *i* is greater than the expected utility *x Ax*, the probability of the action *i* is higher than before. And this equation shows that the probability of the action *i* chosen by another players is also higher than before (**externality**). Furthermore, the equation is derived uniquely by the **monotonic** (that is if one type has increased its share in the population then all types with higher profit should also have increased their shares).

Two Strategies

$$\dot{x} = x(1-x)\{b-(a+b)x\} \quad \cdots (*)$$

Classification:

(I) Non-dilemma: a > 0. b < 0, ESS : one

(II) Prisoner's dilemma **:** a < o. b > o, ESS :one

(III) Coordination : a>0,b>0, ESS two

(IV) Hawk-Dove : a<0,b < 0, ESS one (mixed strategy)

1 \ 2	S 1	S 2
S 1	a,a	0,0
S 2	0,0	b,b

Payoff Matrix

EVOLUTIONARY STABLE STRATEGY (ESS)

DEF. : Weibull(1995): $x \in \Delta$ is an ***evolutionary stable strategy (ESS)*** if for every strategy $y \neq x$ there exists some $\bar{\varepsilon}_y \in (0,1)$ such that the $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}_y)$ following inequality holds for all .

$$u[x, \varepsilon y + (1-\varepsilon)x] > u[y, \varepsilon y + (1-\varepsilon)x].$$

INTERPRETATION : incumbent payoff (fitness) is higher than that of the post-entry strategy

（ESS : ①the solution of the Replicator equation + ② asymptotic stable.）

EVOLUTIONARY STABLE STRATEGY (ESS)

DEF.： Weibull(1995): $x \in \Delta$ is an ***evolutionary stable strategy (ESS)*** if for every strategy $y \neq x$ there exists some $\bar{\varepsilon}_y \in (0,1)$ such that the following inequality holds for all $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}_y)$.

$$u[x, \varepsilon y + (1-\varepsilon)x] > u[y, \varepsilon y + (1-\varepsilon)x].$$

INTERPRETATION：incumbent payoff (fitness) is higher than that of the post-entry strategy

（ESS : ①the solution of the Replicator equation + ② asymptotic stable.）

PROPOSITION

PRO.(Bishop and Cannings (1978)): $x \in \Delta$ is evolutionary stable strategy if and only if it meets these first-order and second-order best-reply :

PROPOSITION

PRO.(Bishop and Cannings (1978)): $x \in \Delta$ is evolutionary stable strategy if and only if it meets these first-order and second-order best-reply :

$$(2.4) \quad u(y,x) \leq u(x,x), \quad \forall y,$$

Nash Eq.

$$(2.5) \quad \begin{array}{l} u(y,x) = u(x,x) \\ \Rightarrow u(y,y) < u(x,y), \end{array} \quad \forall y \neq x,$$

PROPOSITION

PRO.(Bishop and Cannings (1978)): $x \in \Delta$ is evolutionary stable strategy if and only if it meets these first-order and second-order best-reply :

$$(2.4) \quad u(y,x) \le u(x,x), \quad \forall y,$$

Nash Eq.

$$(2.5) \quad \begin{array}{l} u(y,x) = u(x,x) \\ \Rightarrow u(y,y) < u(x,y), \end{array} \quad \forall y \neq x,$$

Asymptotic Stable Conditon