進化ゲーム理論の数理

A Mathematical Principle of Evolutionary Game Theory

*吉川　満 (mitsurukikkawa@hotmail.co.jp)
* 関西学院大学大学院経済学研究科 経済学専攻

The basic concepts in the modern economics of today was constructed by the great mathematician (von Neumann, Nash, Smale, etc). This paper deals with EVOLUTIONARY GAME THEORY in order to pursue the new developments. It is said that it can explain the anomaly in the economics and it will be important field in the future. This paper formulates it rigorously and rearranged by our researches. We propose the direction of the new research (Equilibrium Concept, etc).

1. はじめに

現在の経済学における重要な手法は偉大な数学者, von Neumann, Nash, Debreu, Itô, Smale, etc. の貢献によって構築されたと言っても過言ではない.

そこで本稿ではゲーム理論[1)] (特に進化ゲーム理論) を Kolmogorov 流の公理的確率論の立場から厳密に定式化 (§2) し, 筆者の研究を振り返ることによって新たな研究の方向性を探る (§3).

2. 進化ゲーム理論：基礎篇

2.1. 準備:ゲームの定式化

まずゲームの定式化を行う.

2.1. 定義. 戦略形 (strategic form)n 人ゲームとは次の要素の組によって定義される.

(2.1) $\quad G=\big(N,\{S_i\}_{i\in N},\{f_i\}_{i\in N}\big)$

ここで, (i) $N=\{1,2,\cdots,n\}$ はプレイヤーの集合, (ii) S_i はプレイヤー i の選択可能な行動あるいは戦略の集合, また全員の手は戦略セット $\vec{s}=s_1,\cdots,s_n$ と表記する. (iii) f_i は直積集合 $\vec{S}=S_1\times\cdots\times S_n$ から実数への可測関数であり, プレイヤー i の利得関数を表す. ——

このゲームは次のようにプレイされる. すべてのプレイヤー $1,\cdots,n$ は他のプレイヤーの選択を知らずにそれぞれの戦略 $s_1\in S_1,\cdots,s_n\in S_n$ を選択する. つまり独立性の仮定がある. そのゲームの結果, プレイヤー i は利得 $f_i(\vec{s})$ を得る. またこのような戦略 s_i をプレイヤー i の純粋戦略 (pure strategy) という.

2.2. 仮定. $\forall i$, S_i は可分完備距離空間である[2)]. ——

2.3. 仮定. $\forall i$, $f_i:\vec{s}\to\mathbb{R}$ は有界連続関数である. ——

2.4. 仮定. プレイヤーの目的は自己の利得最大化である. ——

2.5. 仮定. 共有知識 (common knowledge): プレイヤー全員は自分に関してはもちろん, プレイヤー全員の利得関数を知っている. ——

2.6. 定義. 戦略形 n 人ゲーム G の混合拡大(mixed extension) とは, 次の要素の組で定義される.

(2.2) $\quad G^*=\big(N,\{Q_i\}_{i\in N},\{F_i\}_{i\in N}\big)$

ここで, (i) $N=\{1,2,\cdots,n\}$ はプレイヤーの集合, (ii) Q_i は S_i 上の確率分布の全体であり, S_i 上の確率分布 q_i をプレイヤー i の混合戦略といい, 確率変数[3)]を表している. また確率ベクトル $\vec{q}=q_1,\cdots,q_n$ と表記する. (iii) F_i は直積集合 $\vec{Q}=Q_1\times\cdots\times Q_n$ 上の実数値関数であり, 次のように定義される.

(2.3) $\quad F_i(\vec{q})=\displaystyle\int_{\vec{Q}}f_i(\vec{s})d\mu(\vec{s})$

ここで μ は $\vec{q}$ の分布である. また $F_i(\vec{q})$ をプレイヤー i の期待利得関数 (expected payoff function) という. また期待利得関数のセットを $\vec{F}=F_1,\cdots,F_n$ と表記する. ——

2.7. 仮定. 確率変数 $q_i, i=1,\cdots,n$ は独立 (independent) であるとする[4)]. ——

2.8. 注意. $q_1,\cdots,q_n$ が独立 (**仮定 2.7.**) で各 q_k の分布を $\mu_k\in Q_k$ とすると, (2.3) は次のように変更できる.

(2.3') $\quad F_i(\vec{q})=\displaystyle\int_{\vec{Q}}f_i(\vec{s})d\mu(s_1)\cdots\mu_n(s_n).$

またここで $\bar{Q}$ を $\vec{S}$ 上の確率測度の全体, $\vec{\mu}_1,\vec{\mu}_2$ を混合戦略のセット $\vec{q^1},\vec{q^2}$ の分布とする. そこで $\vec{\mu}_1,\vec{\mu}_2\in\bar{Q}$ に対して,

$$\vec{\mu}_\alpha=\alpha\vec{\mu}_1+(1-\alpha)\vec{\mu}_2,\quad 0\le\alpha\le1$$

とすることができ, 新しい確率測度 $\vec{\mu}_\alpha\in\bar{Q}$ が定義できるので, $\bar{Q}$ は凸集合である. なお $\vec{Q}$ は $\bar{Q}$ の中の閉集合である. ——

2.9. 定義. ゲーム $G^*=\big(N,\{Q_i\}_{i\in N},\{F_i\}_{i\in N}\big)$ の**実現可能集合 (feasible set)** U は, 次のように定義される.

$$U=\big\{\vec{F}(\vec{q})\,\big|\ \vec{q}\in\vec{Q}\big\}\ \text{——}$$

2.10. 注意. 実現可能集合 U は, 期待利得関数 $\vec{F}$ の連続性より, 可分完備距離空間の有界な閉集合 (コンパクト集合) である. ——

2.11. 定義. プレイヤー i の戦略 $q_i\in Q_i$ が他の $n-1$ 人のプレイヤーの戦略の組 $q_{-i}=(q_1,\cdots,q_{i-1},q_{i+1},\cdots,q_n)$ に対する**最適応答 (best response)** であるとは,

(2.4) $\quad F_i(q_i,q_{-i})=\displaystyle\max_{r_i\in Q_i}F_i(r_i,q_{-i})$

であるときをいう. 戦略の組 q_{-i} に対するプレイヤー i の

---

1) ゲーム理論とは自然, 社会における様々なゲーム的状況においてプレイヤーの意思決定は相互に関連し, プレイヤーが得る利得は自分自身の戦略だけでなく他のプレイヤーの戦略にも依存するようなプレイヤーの相互依存関係を表現する一般的な数学的手法のことである.

2) 後述する戦略を確率的に選ぶという, 混合戦略という概念を導入するためには可測空間である必要がある.

3) 形式的には可測空間 (Ω,S_i)(ただし Ω は空間, S_i を空間 Ω の部分集合の σ-加法族とする) 上の S_i を定義域とする実数値関数 q_i が確率変数となっていることを表している.

4) この独立性を仮定しない研究が現在盛んに進められている. 例えば今後情報不完備ゲームをマルチンゲールの概念を用いた分析が重要となるであろう.

最適応答の全体を, $B_i(q_{-i})$ とおく. ——

2.12. 定義. 戦略形 n 人ゲーム G^* において, プレイヤーの戦略の組 $\vec{q}^* = (q_1^*, \cdots, q_n^*)$ が**Nash 均衡点 (equilibrium point)** であるとは, すべてのプレイヤー $i(=1,\cdots,n)$ に対して戦略 q_i^* が他のプレイヤーの戦略の組 q_{-i}^* に対する最適応答であるときをいう. ——

2.13. 注意. 写像 $B_i(q_{-i})$ は直積集合 $Q_1 \times \cdots \times Q_{i-1} \times Q_{i+1} \times \cdots \times Q_n$ から集合 Q_j への点対集合写像となり, プレイヤー i の最適応答対応 (best response correspondence) と呼ばれる. ——

ここで戦略の組 $\vec{q}$ に対して, 集合 $B(q) = B_1(q_{-1}) \times \cdots \times B_n(q_{-n})$ とする.

2.14. 定理. ゲーム G^* において混合戦略の組 $\vec{q}^* = (q_1^*, \cdots, q_n^*)$ が Nash 均衡点であるための必要十分条件は次が成り立つことである.

(2.5) $\vec{q}^* \in B(q^*)$ ——

2.15. 定理. ゲーム G^* において, 混合戦略の範囲で少なくとも 1 つの Nash 均衡点が存在する. ——

2.16. 定理. (Kakutani's fixed point theorem[5]) S を可分完備距離空間の非空, コンパクト, 凸集合とし, $F(\cdot)$ を S から S への点対集合写像で, 次の 2 条件を満たすとする.

(i) すべての $x \in S$ に対して $F(x)$ は S の非空な凸部分集合である.

(ii) S 内の任意の点列 $\{x_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ と $\{y_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ に対して,

$y_\nu \in F(x_\nu)$, $\nu = 1, 2, \cdots$, $x_\nu \to x_O$,$y_\nu \to y_O$ $(\nu \to \infty)$ ならば, $y_O \in F(x_O)$ である.

このとき, $x^* \in F(x^*)$ となる写像 $F(\cdot)$ の不動点 x^* が少なくとも 1 つ存在する. ——

2.17. 注意. 上述では純粋戦略が有限集合であると仮定したが, 実現可能集合のコンパクト性を仮定すれば, 本質的には純粋戦略が無限集合でも構わない (河野 (2003)). ——

2.18. 定義. ゲームが次の条件を満たすとき, **ゼロ和 (zero sum) ゲーム**という.

$$\sum_{i=1}^{2} F_i(j,k) = 0, \quad \forall j = 1, 2, \cdots, m_1, \forall k = 1, 2, \cdots, m_2.$$

2.19. 定理. (Minimax theorem) ゼロ和 2 人ゲームにおいて次が成立する.

$$\max_{q_1 \in Q_1} \min_{q_2 \in Q_2} F(q_1, q_2) = \min_{q_2 \in Q_2} \max_{q_1 \in Q_1} F(q_1, q_2). \text{ ——}$$

この Minimax 定理を満たす平衡点は, 鞍点である.

2.2. 進化ゲーム理論

ここでは進化ゲーム理論について取り上げる. 進化ゲーム理論とは大きな集団において様々なプレイヤーが 1 対 1 でランダムに遭遇し, それぞれの戦略に基づき, 次期にその戦略を採用する人が決まり, さらに次期において, $\cdots$ というプロセスが無限に繰り返す状況をいう. まず進化ゲーム理論における解概念を定義する.

2.20. 定義. $q_i \in Q_i$ が**進化的に安定な戦略 (Evolutionary Stable Strategy: ESS)** であるとは, どのような戦略 $q_j \neq q_i$ に対しても, ある $\bar{\epsilon}_q \in (0,1)$ が存在し, すべての $\varepsilon \in (0, \bar{\epsilon}_q)$ について次の不等式が成り立つことをいう.

(2.6) $F\big[q_i, \varepsilon q_j + (1-\varepsilon) q_i\big] > F\big[q_j, \varepsilon q_j + (1-\varepsilon) q_i\big]$. ——

2.21. 命題. Bishop and Cannings(1976) **定義 2.20.** で定義した進化的安定な戦略は以下の条件と同値である.

(2.7) $F(q_j, q_i) \leq F(q_i, q_i), \quad \forall q_j,$

(2.8) $F(q_j, q_i) = F(q_i, q_i)$

$\Rightarrow F(q_j, q_j) < F(q_i, q_j), \quad \forall q_j \neq q_i.$ ——

(2.7) は Nash 均衡の条件であり, (2.8) は漸近安定性の条件である.

以上で論じた ESS は動学的なプロセスにおける安定した状態を直感的に定式化したものである. そこでここでは動学的なプロセスを明示的に与える. そのためにまず次の仮定を置く.

2.22. 定義. 写像 $\pi : \vec{q} \to \mathbb{R}$. そのとき以下の条件を満たすとき, すべての $q_i \in Q_i$ で, **選択ダイナミクス (selection dynamics)** という.

(2.9) $\dot{\vec{q}} = \pi(\vec{q})$,

(2.10) (i) π は Lipschitz 連続である.

(2.11) (ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \pi_i(\vec{q}) = 0.$

(2.12) (iii) $\forall q_i \in Q_i$, $q_i = 0 \Rightarrow \pi(\vec{q}) \geq 0.$ ——

2.23. 定義. π は (2.10)–(2.12) と以下の条件を満たすとき, **正則選択方程式 (regular selection dynamics)** と言う.

(2.13) $\displaystyle\frac{\pi}{0} \equiv \lim_{q_i \to 0} \frac{\pi}{q_i}.$ ——

2.24. 定義. π_i は以下の条件を満たすとき, **単調 (monotonic)** である. $i, i' \in N$,

(2.14) $\displaystyle F(q_i, q_{-i}) \geq F(q_{i'}, q_{-i'}) \Rightarrow \frac{\pi_i(\vec{q})}{q_i} \geq \frac{\pi_{i'}(\vec{q'})}{q_{i'}}.$ ——

これは利得が高い方がその選択ダイナミクスの増加分も大きいことを示している.

2.25. 定義. 正則選択方程式 π が単調性を持つとき, 次のように変形することができ, この方程式を**Replicator 方程式**[6] という.

(2.15) $\displaystyle\frac{\pi_i(\vec{q})}{q_i} = F(q_i, q_{-i}) - \sum_{i=k}^{n} q_k F(q_k, q_{-k}).$ ——

2.26. 定理. (Picard-Lindelöf theorem) $X \subset \mathbb{R}^k$ が開, ベクトル場 $\varphi : X \to \mathbb{R}^k$ が Lipschitz 連続であるとする. このとき (2.9) は, あらゆる状態 $x^O \in X$ を通る一意解 $\xi(\cdot, x^O) : T \to X$ をもつ. さらに $\xi(t, x^O)$ は $t \in T$ と $x \in X$ について連続である. ——

よってこの Replicator 方程式は (局所) 解の存在と一意性に関して保証されている.

また特に利得行列 $A = A^T$ のとき対称 2 人ゲーム (symmetric two person game), 利得行列 $A \neq A^T$ のとき非対称

[5] 原論文 Kakutani(1941) では R^l の場合だけが扱われているが, ここではより一般的に可分完備距離空間の場合を考える.

[6] この方程式はある戦略 i を取ったときの自分の利得が平均利得よりも大きい場合には, その戦略を取る確率が高くなり, またゲームをしている周りのプレイヤーがその戦略を取る確率が高いほどその増加率も高くなる (外部性 (externality) の存在), ということを示している. この方程式の平衡点は Nash 均衡となり, その平衡点が漸近安定であるとき ESS である.

2 人ゲーム (asymmetric two person game) という (利得表 1).

2.27. 例. 戦略の数が 2 つの場合の対称 2 人ゲームの場合 Replicator 方程式は

$$\dot{x} = (ax - by)xy, \qquad y = 1 - x.$$

となり, 非対称 2 人ゲームの場合 Replicator 方程式は次のようになる.

$$\begin{aligned} \dot{y} &= y(1-y)\{a - (a+c)x\}, \\ \dot{x} &= x(1-x)\{d - (b+d)y\}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

ただし, y をプレイヤー 1 が戦略 1 をとる確率, x をプレイヤー 2 が戦略 2 をとる確率とする.

1 ＼ 2	戦略 1	戦略 2
戦略 1	a,b	0,0
戦略 2	0,0	c,d

利得表 1(非対称 2 人ゲーム)

この利得表の a, b, c, d の符号によってゲームは次の 4 つの場合に部類することができる.

(I) 非ジレンマ, (II) 囚人のジレンマ型, (III) コーディネーション型, (IV) タカ＝ハト型.

(I),(II) は純粋戦略の ESS が 1 つであり, (III) は純粋戦略の ESS が 2 つ, (IV) は混合戦略の ESS が 1 つある. ——

3. 進化ゲーム理論：発展篇

3.1 Milnor Attractor

この節では新しい均衡概念を提案し, Nash 均衡, ESS, CSS との関係を調べる. そのために純粋戦略が無限個存在する場合を考える.

3.1. 仮定. 純粋戦略は無限集合であり, その実現可能集合 U は有界閉集合 (コンパクト) であるとする (**注意 2.17.**)[7). ——

3.2. 仮定. 利得関数 $F(q_i, q_j)$ は q_i, q_j 共に 2 回微分可能である. ——

3.3. 定義. Eshel(1983) 戦略 q_u が**連続的に安定な戦略 (Continuously Stable Strategy, CSS)** であるとは, (1) ESS である, (2) 任意の q_v について $|q_u - q_v| < \varepsilon$ を満たすような $\varepsilon > 0$ が存在し, 任意の q_i について $|q_v - q_i| < \eta$ を満たすような $\eta > 0$ が存在し, 次の関係を満たすときをいう.

$$F(q_v, q_i) > F(q_i, q_i) \quad \text{if and only if} \quad |q_v - q_u| < |q_i - q_u|. \tag{3.1}$$ ——

平衡点 q_i^* からずれているとき q_i^* より q_i^* に近い突然変異戦略が必ず侵入できる. したがって戦略は突然変異戦略の侵入と置換の繰り返しによって平衡点 q_i^* に近づく.

3.4. 命題. Eshel(1983) $\hat{q}_i$ が ESS であるための必要条件は, 次の条件を満たすときである.

$$\text{(i)} \quad \frac{\partial}{\partial q_j} F(q_j, \hat{q}_i)\Big|_{q_j = \hat{q}_i} = 0, \tag{3.2}$$

$$\text{(ii)} \quad \frac{\partial^2}{\partial q_j^2} F(q_j, \hat{q}_i)\Big|_{q_j = \hat{q}_i} \leq 0. \text{ ——}$$

この条件は利得関数が極大であるための必要条件である.

3.5. 命題. Eshel(1983)

(i) ESS q_i が $q_i = q_j = \hat{q}_i$ において, CSS となる必要条件は, 次の条件を満たすときである.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_j} + \frac{\partial^2 F}{\partial q_i^2} \leq 0. \tag{3.3}$$

(ii) ESS $\hat{q}_i$ が CSS であるための十分条件は, (3.2)-(ii), (3.3) の等号を除いたものが成り立つことである. ——

よって ESS と CSS の関係からを次のような表 1 に分類することができる.

場合分け	(3.3)	not (3.3)
(3.2)-(ii)	(i) 漸近安定	(ii)Lyapunov 安定
not (3.2)-(ii)	(iii)?	(iv) 漸近不安定

表 1

(i):到達可能で安定に維持される平衡である. (iv):不安定な平衡状態である. (ii): ESS だが CSS ではない平衡状態は, もし最初からその平衡状態にあれば, 安定であるが, 最初にその平衡状態から少しでもずれていると, ますますずれる方向に突然変異体の侵入と置換が起きる. (iii): ESS でないが CSS である平衡状態は戦略の 2 極分化など興味深い現象が指摘されている (Sasaki and Ellner(1995)). そこでこの部分を次のアトラクターによって特徴付ける.

3.6. 定義. Milnor(1985) 閉部分集合 $A \subset M$ は次の 2 つの条件を満たすとき**(Milnor) アトラクター (Attractor)** と呼ばれる.

(1) 吸収領土 (realm of attraction)$\rho(A)$, すなわち $\omega(x) \subset A$ なる点 $x \in M$ すべての集合, は厳密に正の測度を持つ.

(2) 厳密に小さな閉集合 $A' \subset A$ で $\rho(A')$ が $\rho(A)$ と測度ゼロの集合の不安定性を除いて一致するものはない. ——

この定義には, その近傍の全ての軌道がそこに吸引されるという条件が含まれていない. よってアトラクター[8) の近傍から離れていく軌道が存在してもよい.

3.7. 例. 次の $\mathbb{R}$ 上の 1 次元写像 $f : [0, 2\pi] \to [0, 2\pi]$ は $x = 0, \pi$ に Milnor アトラクターを持つ.

$$x_{n+1} = f(x_n) = x_n + \sin^2 x_n \ (\mathrm{mod}\ 2\pi). \text{ ——}$$

3.8. 命題. ある均衡 $\hat{q}_i$ が Milnor Attractor であるための必要条件は次を満たすことをいう.

$$\text{(i)} \quad \frac{\partial^2}{\partial q_j^2} F(q_j, \hat{q}_i)\Big|_{q_j = \hat{q}_i} > 0. \tag{3.4}$$

$$\text{(ii)} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \hat{q}_i \partial q_j} + \frac{\partial^2 F}{\partial \hat{q}_i^2}\Big|_{q_i = q_j = \hat{q}_i} \leq 0. \text{ ——} \tag{3.5}$$

これは均衡は不安定であるが, 均衡に近づいてくる軌道の集合が存在することを意味している.

[7) このときの Replicator 方程式は, 次のようなものとなる (Bomze(1990)).

$$\frac{dP}{dt}(B) = \int_B \Big(\pi\big(x, P, \mu(S)\big) - \pi\big(P, P, \mu(S)\big)\Big) P(dx).$$

[8) 従来の意味でのアトラクターとは次のことをいう.

定義. 力学系 f の閉不変集合 Λ が**アトラクター**であるとは, Λ の近傍 U で,

$$f(U) \subset U \text{ かつ } \Lambda = \bigcap_{n>0} f^n(U)$$

となるものが存在することをいう. ——

よって従来の意味でのアトラクターとは, Λ の近傍 U 内の点 f で写像された後も Λ の近傍内に留まり続けることを意味している.

3.2. 近可積分系

ここでは前節に定義した Replicator 方程式に決定論のノイズを次のように導入する．そこで近可積分 (nearly integrability) 系の議論を導入することで今まで非線形項をも考慮に入れた分析を行う．

3.9. 定義. 非対称 2 人ゲームにおける**ノイズがある Replicator 方程式**[9] とは次のことをいう．

(3.6) $\dot{y} = (1-\delta_1)y(1-y)\{a-(a+c)x\} + \delta_1\left(\frac{1}{2}-y\right)$

(3.7) $\dot{x} = (1-\delta_2)x(1-x)\{d-(b+d)y\} + \delta_2\left(\frac{1}{2}-x\right)$

ただし $0 < \delta_1, \delta_2 \ll 1$. ——

3.10. 命題. 方程式 (2.16) において, 各純粋戦略の均衡の局所安定性は次の条件を満たすとき, 各純粋戦略の均衡は漸近安定である．また混合戦略の均衡, 内点均衡は $\dfrac{abcd}{(a+c)(b+d)}$ が負となるときは, リミットサイクル (limit cycle) となり, 正となるときは, 鞍点となる．

$(y^*, x^*) = (0,0)$ のときは, $a < 0$, $d < 0$,

$(y^*, x^*) = (0,1)$ のときは, $c > 0$, $d > 0$,

$(y^*, x^*) = (1,0)$ のときは, $a > 0$, $b > 0$,

$(y^*, x^*) = (1,1)$ のときは, $b < 0$, $c < 0$.

またノイズが存在する Replicator 方程式 (3.6), (3.7) において, $\dfrac{abcd}{(a+c)(b+d)} < 0$ のとき, 内点均衡は漸近安定となり, その均衡は存在し, リミットサイクルとなっている．また均衡が純粋戦略のみのときの局所安定性は変わらない[10]. ——

3.11. 定理. 純粋戦略と混合戦略という複数均衡を持つ大域不安定なゲームに, ノイズが存在し, $\dfrac{abcd}{(a+c)(b+d)} < 0$ を満たすとき, Arnold 拡散 (Arnold(1964)) が存在する．——

3.12. 定理. (Kolmogorov-Arnold-Moser の定理, Arnold and Avez(1968) を変更) ほとんどすべての δ_1, δ_2 に対して, ノイズが存在する不変トーラスでノイズが存在しない場合の不変トーラスに近いものが正の測度で存在する．——

証明 第 1 積分[11]を用い, 近可積分系の議論を導入すればよい．

3.13. 例. (1) 上記の条件を満たす例として最終提案ゲーム (the ultimatum game) がある．最終提案ゲームとは提案者と応答者の 2 タイプのプレイヤーがおり, その間でお金の分配を考え, 提案者はどのような提案をするのかを考えたゲームである．伝統的なゲーム理論からは提案者は応答者に最小単位を提案するが, 実験では公平な提案が存在することが知られている (吉川 (2005)).

(2) 上記の条件を満たす例として共有資源 (common pool resource) のゲームがある．これでは利得が環境変動により変化することによって, 一般的な非対称 2 人ゲームとなる．伝統的なゲーム理論からはプレイヤーが利己的に行動し, 共有地の悲劇 (tragedy of commons) となることが知られている．しかし上記のようなノイズが存在すると, 共有地の悲劇を回避する可能性がある (吉川 (2006)). ——

3.3. 伊藤解析

前節では決定論のノイズであったが, この節では確率微分方程式 (Langevin 方程式) を用いた分析を行う．

3.14. 定義. 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率過程 $w := (w_t)_{t\in\mathcal{F}}$ で以下の 3 条件 (i)-(iii) を満たすものを ($\mathcal{T}$ 上標準) **ブラウン運動 (Brownian motion)** と呼ぶ.

(i) $w_0 = 0$. (ii) w は連続過程.

(iii) w は独立で正規分布する増分をもつ, すなわち, $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ に対して

(a) $w_{t_{i+1}} - w_{t_i} (i = 0, \cdots, n-1)$ は互いに独立,

(b) $(w_{t_{i+1}} - w_{t_i}) \sim N(0, t_{i+1} - t_i)$. ——

ここで次のような確率微分方程式を考える (Fundenberg and Harris(1992)).

(3.8) $dr_i(t) = r_i(t)\big[u_i(r(t))dt + \sigma_i dW_i(t)\big]$.

ただし, $u_i(r)$ はタイプ i の期待利得, W を分散が 1 で, 共分散 0 の n 次元 Wiener 過程である．これを次の伊藤の公式を利用すると, 次のような Replicator 方程式を得ることができる.

(3.9) $ds_i = \sum_j \Big[\dfrac{\partial f_i(r)}{\partial r_j}\Big]dr_j + \dfrac{1}{2}\sum_{j,k}\Big[\dfrac{\partial^2 f_i(r)}{\partial r_j \partial r_k}\Big]dr_k dr_k$,

ただし $dr_j dr_k = r_j^2\sigma_j^2 dt$ if $j = k$, and 0 otherwise.

3.15. 定理. (Ito's Formula) $a = a(t,\omega)$ は t に関して連続な適合過程とし, $v = \{v(t,\omega)\} \in \mathcal{L}^*$ とする．確率過程 $X = \{X_t\}$ を

$dX_t = adt + vdB_t$, $B_0 = 0$, a.s.

とする．すなわち, a.s. で, X は次で定義される.

(3.10) $X_t(\omega) = X_0(\omega) + \displaystyle\int_0^t a(s,\omega)ds + \int_0^t v(s,\omega)dB_s$.

$\mathbb{R}^2$ 上の C^2 級数 $f(x,t)$ と $x = X$ の合成で得られる確率過程を $Y = f(X,t)$ とする．このとき次が成立する.

(3.11) $dY_t = \dfrac{\partial f}{\partial t}dt + \dfrac{\partial f}{\partial x}dX_t + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dX_t)^2$

ただし, $(dX_t)^2 = (adt + vdB_t)^2$ は

(3.12) $dt \cdot dt = dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0$, $dB_t \cdot dB_t = dt$

として計算する．すなわち, $(dX_t)^2 = v^2 dt$ になる．確率過程の微分式 (3.9) は, 任意の $T \geq 0$ について, 次が成立することを意味する．等式はすべて a.s. の意味である.

(3.13)
$$f(X_T, T) - f(X_0, 0) = \int_0^T \Big\{\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot v^2 + \frac{\partial f}{\partial x}a\Big\}dt + \int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}vdB_t.$$ ——

3.16. 例. 戦略が 2 つ場合, (3.9) は次のようになる.

$ds_1 = s_1 s_2\big[(u_1(s) - u_2(s))dt + (\sigma_2^2 s_2 - \sigma_1^2 s_1)dt$

[9] Replicator 方程式 (2.16) において, タイプ 1 については, $\delta_1\Big(\dfrac{l^1+l^2}{2}\Big)$, タイプ 2 については, $\delta_2\Big(\dfrac{l^1+l^2}{2}\Big)$, という新規参入者の数, さらには退出者の数を考慮した方程式である.

[10] 数学の問題として考えた場合, 局所安定性は変更する可能性が存在するが, ゲーム理論の枠組みで考えたとき, つまりある戦略 1 を取った時の利得と, 戦略 2 を取った時の利得差が十分小さい (ノイズは十分小さい) 時は, 各プレイヤーは戦略的に行動することはないので, 符号が変更する場合は考えていない．ただし戦略の集合が無限の場合にはこのことを考慮すべきであろう.

[11] この第 1 積分は, 次の正準方程式 (canonical equation) を満たすので, Hamilton 系となることが分かる.

$\dot{x} = P(x,y)\dfrac{\partial H(x,y)}{\partial y}, \quad \dot{y} = -P(x,y)\dfrac{\partial H(x,y)}{\partial x}$

ただし, $P(x,y) = x(1-x)y(1-y)$ である.

$$+ \sigma_1 dW_1 - \sigma_2 dW_2\big],$$

$$(3.14)\quad = s_1 s_2\big[(u_1(s) - u_2(s))dt + (\sigma_2^2 s_2 - \sigma_1^2 s_1)dt + \sigma d\widetilde{W}\big],$$

ただし $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$, $\widetilde{W} = (W_1 - W_2)/\sigma$ は標準 Wiener 過程である. ——

特に各プレイヤーの戦略が 2 つで, 対称 2 人ゲームの場合は次の命題が成り立つ.

3.17. 命題. Fudenberg and Harris(1992)

(i) $a - c > (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)/2$, $d - b < (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)/2$ のとき, $t \to \infty$ のとき, 確率 1 で, $s_1(t) \to 1$ となる.

(ii) $a - c < (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)/2$, $d - b > (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)/2$ のとき, $t \to \infty$ のとき, 確率 1 で, $s_1(t) \to 0$ となる.

(iii) $a - c > (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)/2$, $d - b > (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)/2$ のとき, $t \to \infty$ のとき, 確率 $I_1/(I_1 + I_2)$ で, $s_1(t) \to 1$ となり, 確率 $1 - I_1/(I_1 + I_2)$ で, $s_1(t) \to 0$ となる. ただし $I_1 = \int_0^{s_1(0)} \exp\Big[-\int_z^x [2\alpha(y)/\beta^2(y)]dy\Big]dx$, $I_2 = \int_{s_1(0)}^1 \exp\Big[-\int_z^x [2\alpha(y)/\beta^2(y)]dy\Big]dx$ である. ——

3.4. 統計力学

本節では統計力学を用いて, 進化ゲーム理論を構築する. ここでは戦略の分布に着目し, その分布で均衡が有無を調べた. ここでは正方格子上にかなり多数のプレイヤーがいて, 最近接のプレイヤーと戦略を 2 つを持ち, ゲームを行うとする.

具体的には 1 から N までの整数の集合 $V = \{1, 2, \cdots, N\} \equiv \{x\}_{1,\cdots,N}$ を格子, その要素 x をサイト (site) あるいは格子点と呼ぶことにする. サイト 2 個の組を適当に集めた集合 $B = \{(xy); x, y \in \mathbb{Z}^2, |x - y| = 1\}$ を作り, その各要素 (xy)(ボンドあるいは結合) は隣同士の組 (最近接 (nearest neighbor) 格子点対) でゲームを行う. そこゲームの結果, 各プレイヤーの利得が対応する. ただしこのモデルでは同時 (one-shot) にゲームを行うので, 動学理論ではなく, 静学理論である.

3.18. 命題. 仮定 2.4. のもとでのプレイヤー x のある戦略 $\{s_i\}, i = 1, \cdots, N$ を取り, ある利得 f を得るというゲームの状況下に戦略 $\{s_i\}$ の確率分布は次のようになる.

$$(3.15)\quad P(\{s_i\}) = Z^{-1}\exp(\gamma f).$$

ただし $\{s_i\}$ はプレイヤー i の戦略, γ は変数[12], f はある戦略 $\{s_i\}$ を取ったときの利得, Z は規格化定数を表している. よって $\sum_{i=1}^{N} P(\{s_i\}) = 1$ となる. ——

この**命題 3.18.** は, 利得 f が大きければ, その戦略をとる確率が高くなることを表している. また形式的には戦略の空間 $\Omega = \{-1, +1\}^{Z^2}$, ただし $\{-1, +1\}$ は戦略の添え字を表し, $\{+1, +2\}$ でも構わない. それ上の確率測度 μ は $\mu(ds) \propto \exp[\gamma f(s)]ds$ によって与えられる (**命題 3.18.**). ただし ds は Ω 上の一様分布とする.

[12] γ は変数であるが, このモデルではゲームを一斉に行い, 他者がどのような戦略を用いているのか分からない. そこでこの変数 γ が他者の行動を知らせる, 例えば正の情報量などを表している. よって変数 γ が最大のとき, 既存の進化ゲーム理論と同様になる. ただし外部性は存在しない.

3.19. 定義. 戦略が一定の秩序を持っているかどうかを判断する量を**秩序パラメータ (order parameter)** という概念を次のように導入する.

$$(3.16)\quad m = \langle s_i \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} s_i \equiv \Big(\sum_i s_i P(\{s_i\})\Big).$$

ただし $\langle\ \rangle$ は平均を表している. ——

3.20. 命題. 統計力学を用いた進化ゲーム理論における進化的に安定な戦略とは次の条件を満たす.

$$(3.17)\quad f(y, x) \le f(x, x), \qquad \forall y,$$

$$(3.18)\quad |m - m^*| < \varepsilon.$$

ただし m^* は戦略の添え字の値を示している. ——

また上記のものは最近接とのみのゲームであったが, ランダムにマッチしてゲームを行うモデルも構築することができる. 詳しくは吉川 (2008) を参照.

4. 終わりに

以上のように伝統的なゲーム理論を厳密に定式化し, 筆者の研究を交えることによって, 今までの既存のゲーム理論の限界と今後の発展の可能性を考察した.

このゲーム理論は生物現象や社会現象への応用や本稿で展開した理論的な内容がある. von Neumann が経済学に関心をもつようになった背景には, 当時の数学の発展段階や, 彼の数学観による. 彼は数学者はさまざまな領域のどれを選んで研究してもよいし, その選択やその結果としての成功の度合いは, 主として審美的な価値によって影響されるのが普通であるけれども, 経験的な源泉からあまりに遠く離れると, 数学はその創造的な力を失うと警告している[13]. これらが別々に発展するのではなく, 共に相互関係を保ちつつ, 発展することを期待し, 本稿を閉じたい.

参考文献

Arnol'd,V.I.(1964): *Soviet Math. Dokl.***5**,581.
Arnol'd,V.I. and Avez,A.(1968): *Ergodic Problems of Classical Mechanics*, Benjamin, New York.
Bishop,D.T. and Cannings,C.(1976): *Adv.Appl.Prob.***8**,616.
Bomze,I.(1990): *Monatsch.Math.***110**,189.
Eshel, I.(1983): *J.Theor.Biol.***103**,99.
Fudenberg, D. and Harris, C.(1992): *J.Econ. The.***57**,420.
Kakutani, S.(1941): *Duke Math.J.***8**,457.
吉川満 (2005): 『関西学院 経済学研究』, **36**,21.
吉川満 (2006): 『関西学院 経済学研究』, **37**,305.
吉川満 (2007): 『進化経済学論集』, **11**,450.
吉川満 (2008): 『京都大学数理解析研究所講究録』印刷中.
河野敬雄 (2003)：『Rokko Lectures in Mathematics』, **13**.
Milnor,J.(1985): *Comm. in Math. Phys.***99**,177.
Sasaki, A. and Ellner, S.(1995): *Evolution*,**49**,337.
鈴木光男 (1994): 『新ゲーム理論』勁草書房.

[13] このようなゲーム理論に関する記述は鈴木 (1994) が詳しい.