

Ver. 2/6

進化ゲーム理論の数理

A Mathematical Principle of Evolutionary Game Theory

Graduate School of Economics, Kwansei
Gakuin University D3

吉川 満

mitsurukikkawa@hotmail.co.jp

第4回数学総合若手研究集会(北海道大学 学術交
流会館) 2008年2月13日 16:50-17:20 (D)

関西学院大学大学院経済学研究科研究会WEBの「学会報告の
レジュメ等」から **Downloadable**

<http://members.ld.infoseek.co.jp/kgu-gse/gakkai/gakkai.htm>

OUTLINE

1. INTRODUCTION

2. REVIEW

2-1. NONCOOPERATIVE GAME THEORY,

2-2. EVOLUTIONARY GAME THEORY

3. OUR RESEARCHES

3-1. ESS and MILNOR ATTRACTOR

3-2. NEARLY INTEGRABILITY (KOLMOGOROV–
ARNOLD – MOSER'S THEOREM, ARNOLD
DIFFUSION)

3-3. ITO CALCULAS

3-4. STATISTICAL MECHANICS

4. SUMMARY

The background features a light blue field with a repeating geometric pattern of white lines forming star-like shapes. Overlaid on this are three vertical bands of a slightly different shade of blue. In the top-left and bottom-right corners, there are clusters of squares in various shades of blue, some with white outlines, creating a modern, abstract aesthetic.

1. INTRODUCTION

J.von Neumann

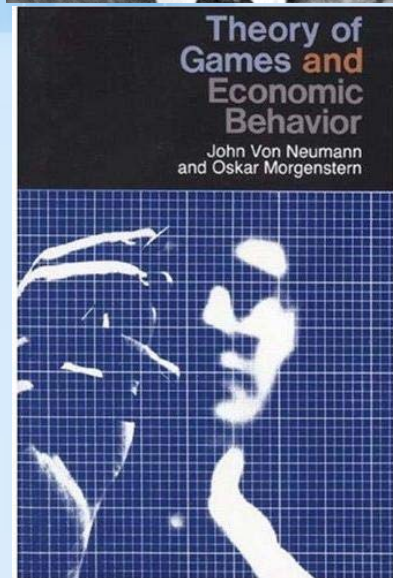
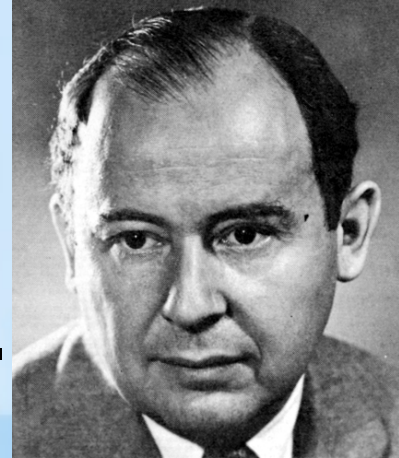
1. A Model of General Economic Equilibrium, RES, 31(1945-46), 1-9.

→ He proved the existence of situations of equilibrium in mathematical models of market development based on supply and demand by applying Brouwer's fixed point theory.

2. Theory of Game and Economic Behavior (With Oskar Morgenstern), 1944.

→ 経済学にゲーム理論を持ち込んだ。

➤ ノーベル経済学賞受賞者ポール・サミュエルソンの教科書をみて「ニュートン以前の数学ではないか」と言って笑った。

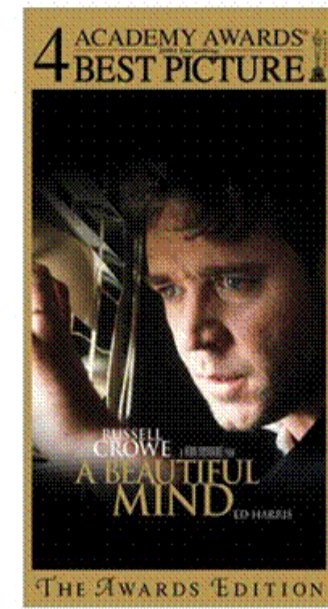


John Forbes Nash

Nash equilibrium

He shared the 1994 Nobel Prize in Economics with two other game theorists, Reinhard Selten and John Harsanyi.

His most famous work in pure mathematics was the **Nash embedding theorem**, which showed that any abstract Riemannian manifold can be isometrically realized as a submanifold of Euclidean space. He also made contributions to the theory of nonlinear parabolic partial differential equations.



A Beautiful Mind

S.Smale



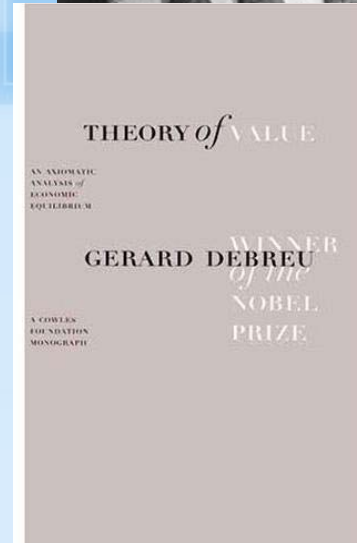
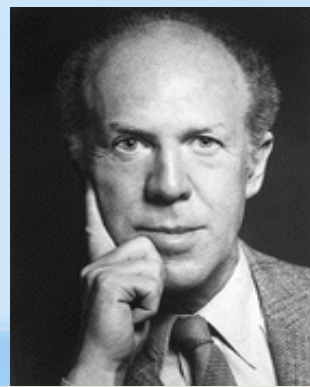
- **Stephen Smale** (born July 15, 1930) is an American mathematician from Flint, Michigan, and winner of the Fields Medal in 1966.
- Smale is also known for injecting Morse theory into mathematical economics.
(70年代後半から80年代前半にかけて)
- Differential Topology (Journal of Mathematical Economics, Vol. 1(1974), Vol.3 (1976), American Economic Review, 1976, Econometrica, 1980, etc.

Gerard Debreu

➤ In 1954 he published a breakthrough paper titled *Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy* (together with Kenneth Arrow, *Econometrica*, 1954), in which they provided a definitive mathematical proof of the existence of general equilibrium, using topological rather than calculus methods.

➤ The Theory of Value, 1959.

➤ He won the 1983 Nobel Memorial Prize in Economics.



Kiyoshi Ito

- The basic concept of this calculus is the Ito integral, and the most basic among important results is **Ito's lemma**. It facilitates mathematical understanding of random events. His theory is widely applied, for instance in financial mathematics.



The background features a light blue geometric pattern of interconnected lines forming star-like shapes. Overlaid on this are several vertical bands of varying shades of blue. In the top-left and bottom-right corners, there are clusters of squares in different shades of blue, some with white outlines, creating a modern, abstract design.

PRELIMINARIES

2-1. NONCOOPERATIVE GAME THEORY

WHAT IS GAME ?

(Non-cooperative Game)

相互関係にある2人の主体(Player 1, Player 2)がいるとする。

Player 1が戦略1をとり、Player 2 が戦略1をとったときに得られる
Player 1 ' payoff is a , Player2's payoff b. このような状況のもと
で、各主体はどのような戦略をとるのか？

→その解概念がNash Equilibrium.

(ただしこのゲームは一度限りであるとする。)

		Player 2	
		S1	S2
player1	S1	a,b	0,0
	S2	0,0	c,d

a,b,c,d の符号によっ
てゲームの種類が決
まる。

Classification of Game theory

➤ 1. Cooperative Game (von Neumann)

→ 分配に着目(提携、解: Core(支配されない集合), Shapley値(貢献度))

➤ 2. Noncooperative Game (Nash)

→ 競争に着目(妥協点を探す = Nash均衡)

➤ 3. Differential Game (Pontryagin)

→ 最適化のプロセスに着目(最適制御)

➤ 4. Evolutionary Game (Maynard-Smith)

→ 淘汰と変異に着目(微分方程式、ESS)

➤ 5. Stochastic Game (Shapley)

→ 確率的に状態(Nature)が変化

Game Theory for Mathematical Science

- ▶ GAME THEORY = MATHEMATICS or NOT.
- ▶ **Mathematics** : 少数の雑誌にしか掲載されておらず, 本数の少ない.
- ▶ **NOT** : 理論経済学に限って言えば, かなりのウェートを占めている(例: Econometrica, 1995年では約**5割**)(『現在経済学の潮流2002』P209)。

MATHEMATICS for GAME THEORY

➤ TRADITIONAL GAME THEORY

TOPOLOGY (convex analysis, fixed point theory, multi-valued mapping ...)

➤ OUR RESEARCH

STOCHASTIC (differential equation, statistical mechanics, ...)

PURPOSE OF THIS PAPER

➤ GAME 理論をKOLMOGOROV流の公理的確率論の立場から厳密に定式化

REASON: MAXIMIZATION or COORDINATION・LEARNING

- 個人の行動を「最適化」の結果(statics)と説明する、それとも「調整・学習」の結果(dynamics)と見る。
- Former → Noncooperative Game
- Follower → Evolutionary Game

2.1 定義 戦略形ゲーム

➤ 定義: 戦略形(strategic form) n 人ゲームとは次の要素の組によって定義される。

$$(2.1) \quad G = \left(N, \{S_i\}_{i \in N}, \{f_i\}_{i \in N} \right)$$

ここで, (i) $N = \{1, 2, \dots, n\}$ はプレイヤーの集合,
(ii) S_i はプレイヤー i の選択可能な行動あるいは戦略の集合、また全員の手は戦略セット $\vec{s} = s_1, \dots, s_n$ と表記する. (iii) f_i は直積集合 $\vec{S} = S_1 \times \dots \times S_n$ から実数への可測関数であり、プレイヤー i の利得関数を表す。

ゲームのプレイ、仮定

- ▶ すべてのプレイヤー $1, \dots, n$ は他のプレイヤーの選択を知らずにそれぞれの戦略 $s_1 \in S_1, \dots, s_n \in S_n$ を選択する。つまり独立性の仮定がある。そのゲームの結果、プレイヤー i は利得 $f_i(s)$ を得る。またこのような戦略 s_i をプレイヤー i の純粋戦略(pure strategy) という。
- ▶ 仮定: $\forall i, S_i$ は可分完備距離空間である。
- ▶ 仮定: $\forall i, f_i : S \rightarrow \mathbb{R}$ は有界連続であり、線型関数である。
- ▶ 仮定: プレイヤーの目的は自己の利得最大化である。
- ▶ 仮定: 共有知識(common knowledge): プレイヤー全員は自分に関してはもちろん、プレイヤー全員の利得関数を知っている。

2.6 定義 戦略形ゲーム(混合拡大)

➤ 定義: 戦略形 n 人ゲーム G の混合拡大(mixed extension)とは次の要素の組によって定義される。

$$(2.2) \quad G^* = \left(N, \{Q_i\}_{i \in N}, \{F_i\}_{i \in N} \right)$$

ここで, (i) $N = \{1, 2, \dots, n\}$ はプレイヤーの集合, (ii) Q_i は S_i 上の確率分布の全体であり、 S_i 上の確率分布 q_i をプレイヤー i の混合戦略といい、確率変数を表している。また確率ベクトル $\vec{q} = q_1, \dots, q_n$ と表記する。 (iii) F_i は直積集合 $\vec{Q} = Q_1 \times \dots \times Q_n$ 上の実数値関数であり、次のように定義される。

$$(2.3) \quad F_i(\vec{q}) = \int_{\vec{Q}} f_i(\vec{s}) d\mu(\vec{s})$$

ここで μ は $\vec{q}$ の分布である。また $F_i(\vec{q})$ をプレイヤー i の期待利得(expected payoff function) という。また期待利得関数のセットを $F = F_1, \dots, F_n$ と表記する。

仮定2.7., 注意2.8

➤ 仮定: 確率変数 $q_i, i=1, \dots, n$ は独立(independent) であるとする.

➤ 注意: $q_1, \dots, q_n$ が独立で各 q_k の分布を $\mu_k \in Q_k$ とすると、(2.3)は次のように変更できる。

$$(2.3') \quad F_i(\vec{q}) = \int_{\vec{Q}} f_i(\vec{s}) d\mu_1(s_1) \cdots \mu_n(s_n)$$

またここで Q を S 上の確率測度の全体 μ_1, μ_2 を混合戦略のセット $\vec{q}^1, \vec{q}^2$ の分布とする。そこで $\vec{\mu}_1, \vec{\mu}_2 \in \vec{Q}$ に対して、

$$\vec{\mu}_\alpha = \alpha \vec{\mu}_1 + (1-\alpha) \vec{\mu}_2 \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

ということができ、新しい確率測度 $\vec{\mu}_\alpha \in \vec{Q}$ が定義できるので、 $\vec{Q}$ は凸集合である。なお $\vec{Q}$ は $\vec{Q}$ の中の閉集合である。

定義2.9.実現可能集合, 注意2.10.

- 定義: ゲーム $G^* = (N, \{Q_i\}_{i \in N}, \{F_i\}_{i \in N})$ の実現可能集合(feasible set) U は、次のように定義される。

$$U = \left\{ \vec{F}(\vec{q}) \mid \vec{q} \in \vec{Q} \right\}$$

- 注意: 実現可能集合 U は、期待利得関数 $\vec{F}$ の連続性より、可分完備距離空間の有界な閉集合(コンパクト集合)である。

定義2.11 最適応答

▶ 定義: プレイヤー*i* の戦略 $q_i \in Q_i$ が他の $n-1$ 人のプレイヤーの戦略の組

$q_{-i} = (q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_n)$ に対する最適応答(best response) であるとは、

$$(2.4) \quad F_i(q_i, q_{-i}) = \max_{r_i \in Q_i} F_i(r_i, q_{-i})$$

であるときをいう. 戦略の組 q_{-i} に対するプレイヤー*i* の最適応答の全体を、 $B_i(q_{-i})$ とおく。

定義 2.12. Nash 均衡, 注意2.13.

➤ 定義: 戦略形 n 人ゲーム G^* において、プレイヤーの組 $\vec{q}^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$ が Nash 均衡であるとは、すべてのプレイヤー i ($=1, \dots, n$) に対して戦略 q_i^* が他のプレイヤーの戦略の組 q_{-i}^* に対する最適応答であるときをいう。

➤ 注意: 写像 $B_i(q_{-i})$ は直積集合 $Q_1 \times \dots \times Q_{i-1} \times Q_{i+1} \times \dots \times Q_n$ から集合 Q_i への点対集合写像となり、プレイヤー i の最適応答対応と呼ばれる。

→

ここで戦略の組 q に対して、集合 $B(q) = B_1(q_{-1}) \times \dots \times B_n(q_{-n})$ とする。

定理2.14.

➤ 定理: ゲーム G^* において混合戦略の組 $\vec{q}^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$ が Nash 均衡であるための必要十分条件は次が成り立つことである。

$$(2.5) \quad \vec{q}^* \in B(q^*)$$

証明 Nash均衡、最適応答の集合の定義から必定義条件、十分条件は明らかである。

定理2.15.

➤ 定理: ゲーム G^* において、混合戦略の範囲で少なくとも1つNash 均衡が存在する。

証明 定理2.14よりゲームの最適応答反応 $B(q)$ が次の角谷の不動点定理(定理2.16)の条件を満たすことを言えばよい.

(1)プレイヤー i の純粋戦略の数を m_i とすると、プレイヤー i の混合戦略の集合 Q_i は m_i 次元Euclid空間の (m_i-1) 次元単体であり、コンパクトな凸部分集合である。したがって、直積空間 $Q=Q_1 \times \dots \times Q_n$ も $m=m_1+\dots+m_n$ 次元Euclid空間のコンパクトな凸部分集合となる。

定理2.16.(Kakutani's fixed point Theory)

定理: S を可分完備距離空間の非空, コンパクト, 凸集合とし, $F(\cdot)$ を S から S への点対集合写像で, 次の2つの条件を満たすとする。

(i) すべての $x \in S$ に対して $F(x)$ は S の非空な凸部分集合である。

(ii) S 内の任意の点列 $\{x_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ と $\{y_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ に対して、

$y_\nu \in F(x_\nu), \nu=1, 2, \dots, x_\nu \rightarrow x_0, y_\nu \rightarrow y_0 (\nu \rightarrow \infty)$ ならば、 $y_0 \in F(x_0)$ である。

このとき、 $x^* \in F(x^*)$ となる写像 $F(\cdot)$ の不動点 x^* が少なくとも1つ存在する。

(2) 関数 F は連続であり、線形関数であるので、最適応答の集合 $B_i(q_{-i})$ は Q_i の非空な凸部分集合となる。よってその直積 $B(q) = B_1(q_1) \times \dots \times B_n(q_n)$ も Q の非空な凸部分集合である。

(3) 直積集合 $Q = Q_1 \times \dots \times Q_n$ 内の2つの点列 $\left\{ q^\nu = (q_1^\nu, \dots, q_n^\nu) \right\}_{\nu=1}^{\infty}$ と $\left\{ \bar{q}^\nu = (\bar{q}_1^\nu, \dots, \bar{q}_n^\nu) \right\}_{\nu=1}^{\infty}$ に対して、

$$\bar{q}^\nu \in B(q^\nu), \nu = 1, 2, \dots$$

$$q^\nu \rightarrow q^0, \bar{q}^\nu \rightarrow \bar{q}^0 (\nu \rightarrow \infty)$$

とする。

このとき、ゲームの最適応答対応 $B(\cdot)$ の定義より、すべてのプレイヤー i ($=1, \dots, n$) の任意の混合戦略 $t_i \in Q_i$ に対して、

$$F_i(\bar{q}_i^\nu, q_{-i}^\nu) \geq F_i(t_i, q_{-i}^\nu), \nu = 1, 2, \dots$$

が成立する. この式で $\nu \rightarrow \infty$ とすると、 F の連続性より

$$F_i(\bar{q}_i^0, q_{-i}^0) \geq F_i(t_i, q_{-i}^0)$$

が成り立つ. t_i は Q_i の任意の元だから、

$\bar{q}_i^0 \in B_i(q_{-i}^0) (i = 1, \dots, n)$ である. ゆえに $\bar{q}^0 \in B(q^0)$ である. (証 終)

Existence of a Nash Equilibrium (Another Notation)

- The strategic game $\langle N, \{A_i\}, (\succeq_i) \rangle$ has a Nash equilibrium if for all $i \in N$
 - (1) The set A_i of actions of player i is a nonempty compact convex subset of a Euclidian space
 - (2) And the preference relation $\succeq_i$ is continuous, **quasi-concave** on A_i

PROOF Kakutani's fixed point theory.

注意2.17, 定義2.18(ゼロ和ゲーム)

▶ 注意: 上述では純粋戦略が有限集合であると仮定したが、実現可能集合のコンパクト性を仮定すれば、本質的には純粋戦略が無限集合でも構わない。

▶ 定義: ゲームが次の条件を満たすとき、ゼロ和(zero sum) ゲームという。

$$\sum_{i=1}^2 F_i(j, k) = 0, \forall j = 1, 2, \dots, m_1, \forall k = 1, 2, \dots, m_2.$$

定理2.19.(Minimax Theorem)

➤ 定理:(von Neumann ,1928) ゼロ和2人ゲームにおいて次が成立する。

$$\max_{q_1 \in Q_1} \min_{q_2 \in Q_2} F(q_1, q_2) = \min_{q_2 \in Q_2} \max_{q_1 \in Q_1} F(q_1, q_2).$$

証明法はいろいろある。例えば(1)不動点定理、(2) 凸集合の分離定理、(3) 代数的方法を用いるものが知られている。

→プレイヤー間の利害が完全に対立している場合は合理的な策が必ずある。

補題1: ゼロ和2人ゲームにおいて

$$\max_{q_1 \in Q_1} \min_{q_2 \in Q_2} F(q_1, q_2) \leq \min_{q_2 \in Q_2} \max_{q_1 \in Q_1} F(q_1, q_2).$$

が成り立つ.

補題2: ゼロ和2人ゲームにおいて均衡点

$q^* = (q_1^*, q_2^*)$ が存在するための必要十分条件は,

$$\max_{q_1 \in Q_1} \min_{q_2 \in Q_2} F(q_1, q_2) = \min_{q_2 \in Q_2} \max_{q_1 \in Q_1} F(q_1, q_2).$$

が成り立つことである.

The background features a light blue field with a repeating geometric pattern of interconnected lines forming star-like shapes. Overlaid on this are several vertical bands of varying shades of blue. In the top-left and bottom-right corners, there are clusters of squares in different shades of blue, some with white outlines, creating a modern, abstract aesthetic.

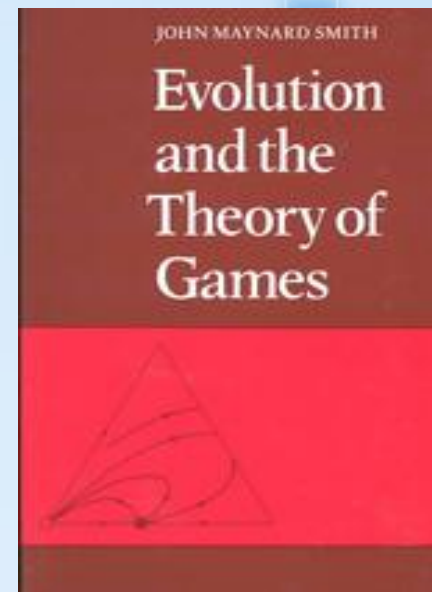
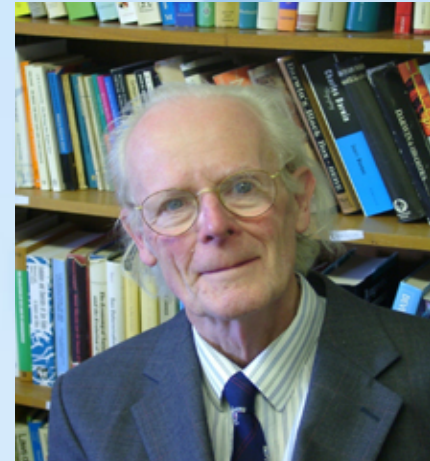
2-2. EVOLUTIONARY GAME THEORY REVIEW

WHAT IS “EVOLUTIONARY GAME THEORY” ?

In 1973 Maynard Smith formalized a central concept in game theory called the evolutionary stable strategy (ESS), based on a verbal argument by G.R.Price. This area of research culminated in his 1982 book *Evolution and the Theory of Games*. The Hawk-Dove game is arguably his single most influential game theoretical model.

POINT ! : 利得(payload)→適応度(fitness)

大きな集団において様々なプレイヤーが1対1でランダムに遭遇し、それぞれの戦略に基づき、次期にその戦略を採用する人が決まり、さらに次期において、・・・というプロセスが無限に繰り返す状況をいう。



定義:2.20. EVOLUTIONARY STABLE STRATEGY (ESS)

定義: Weibull(1995): $q_i \in Q_i$ is an **evolutionary stable strategy (ESS)** if for every strategy $q_j \neq q_i$ there exists some $\varepsilon_y \in (0,1)$ such that the following inequality holds for all $\varepsilon \in (0, \varepsilon_y)$

$$u[x, \varepsilon y + (1 - \varepsilon)x] > u[y, \varepsilon y + (1 - \varepsilon)x].$$

INTERPRETATION: どのような突然変異戦略を採用したとしても、既存戦略の方が効用が高い。

(ESS : ①the solution of the Replicator equation + ② asymptotic stable.)

命題 2.21: CHARACTERIZE ESS

命題: Bishop and Cannings(1976): $q_i \in Q$ is evolutionary stable strategy if and only if it meets these first-order and second-order best-reply :

$$(2.7) \quad F(y, x) \leq F(x, x), \quad \forall q_j, \quad \leftarrow$$

Nash Eq.

$$(2.8) \quad \begin{aligned} &F(y, x) = F(x, x) \\ &\Rightarrow F(y, y) < F(x, y), \end{aligned} \quad \forall q_j \neq q_i,$$

Asymptotic Stable
Conditon

定義2.22. 選択ダイナミクス

定義： $\pi : \vec{q} \rightarrow \mathbb{R}$ そのとき以下の条件を満たすとき, すべての $q_i \in Q_i$ で, 選択ダイナミクス(selection dynamic) という.

$$(2.9) \quad \dot{\vec{q}} = \pi(\vec{q})$$

$$(2.10) \quad (\text{i}) \quad \text{Lipschitz continuous}$$

$$(2.11) \quad (\text{ii}) \quad \sum_{i=1}^n \pi_i(\vec{q}) = 0.$$

$$(2.12) \quad (\text{iii}) \quad \forall q \in Q_i, \quad q_i = 0 \Rightarrow \pi(\vec{q}) \geq 0.$$

定義2.23, 24. 正則性, 単調性

定義: π は(2.10)-(2.12) と以下の条件を満たすとき, 正則選択方程式(regular selection dynamics)と言う.
$$\frac{\pi}{0} \equiv \lim_{q_i \rightarrow 0} \frac{\pi}{q_i}.$$

定義: π は以下の条件を満たすとき, 単調(monotonic)である.

$$F(q_i, q_{-i}) \geq F(q_{i'}, q_{-i'}) \Rightarrow \frac{\pi_i(\vec{q})}{q_i} \geq \frac{\pi_{i'}(\vec{q}')}{q_{i'}}.$$

⇒利得が高い方がその選択ダイナミクスの増加分も大きいことを示している。

定義2.25 Replicator方程式

定義: 正則選択方程式 π が単調性を持つ時、次のように変形することができ、この方程式を**Replicator 方程式**という.

$$\frac{\pi_i(\vec{q})}{q_i} = F(q_i, q_{-i}) - \sum_{k=1}^n q_k F(q_k, q_{-k}).$$

この方程式はある戦略*i*を取ったときの自分の利得が平均利得よりも大きい場合には、その戦略を取る確率が高くなり、またゲームをしている周りのプレイヤーがその戦略を取る確率が高いほどその増加率も高くなる(外部性 externality)の存在), ということを示している。この方程式の平衡点は Nash 均衡となり、その平衡点が漸近安定であるとき ESS である。

定理2.26: Picard-Lindelof Theorem

➤ 定理: $X \subset \mathbb{R}^k$ が開, ベクトル場 $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}^k$ が Lipschitz 連続であるとする。このとき(2.9) は、あらゆる状態 $x^0 \in X$ を通る一意解 $\xi(\cdot, x^0): T \rightarrow X$ をもつ。さらに $\xi(t, x^0)$ は $t \in T$ と $x \in X$ について連続である。

Symmetric and Asymmetric Games

➤ 対称2人ゲームと非対称2人ゲームの違い

→ Player 1 and 2 is DIFFERENT Payoff Matrix.

		Player 2	
		S1	S2
Player 1	S1	A, A	C, B
	S2	B, C	D, D

Symmetric Two Person Game

Replicator Equation: 1本

$$A = A^T$$

		Player 2	
		S1	S2
Player 1	S1	A, E	C, G
	S2	B, F	D, H

Asymmetric Two Person Game

2本

$$A \neq A^T$$

例2.27. 各プレイヤーの戦略が2つの場合

★対称2人ゲーム(戦略が2つの場合)

$$\dot{x} = x(1-x)\{b - (a+b)x\} \quad 1$$

主な分類:

- (I) 非ジレンマ型: $a > 0, b < 0$, ESS :1つ
- (II) 囚人のジレンマ: $a > 0, b < 0$, ESS :1つ
- (III) コーディネーション型: $a > 0, b > 0$, ESS 2つ
- (IV) タカ=ハト型: $a < 0, b < 0$, ESS 1つ(混合戦略)

	2	
	戦略1	戦略2
戦略1	a,a	0,0
戦略2	0,0	b,b

利得表

★非対称2人ゲーム(戦略が2つの場合)

$$(2.16) \quad \begin{aligned} \dot{y} &= y(1-y)\{a - (a+c)x\}, \\ \dot{x} &= x(1-x)\{d - (b+d)y\}. \end{aligned} \quad 1$$

y をプレイヤー1が戦略1を取る確率、

x をプレイヤー2が戦略2を取る確率

	2	
	戦略1	戦略2
戦略1	a,b	0,0
戦略2	0,0	c,d

利得表

The background features a light blue field with a repeating geometric pattern of interconnected lines forming star-like shapes. Overlaid on this are several vertical bands of varying shades of blue. In the top-left and bottom-right corners, there are clusters of squares in various shades of blue, some with white outlines, creating a modern, abstract aesthetic.

3. EVOLUTIONARY GAME THEORY

OUR RESEAECHES

3.1 ESS, CSS and MILNOR ATTRACTOR

仮定3.1, 3.2.

- ▶ 仮定: 純粋戦略は無限集合であり、その実現可能集合 U は有界閉集合 (コンパクト) であるとする。
- ▶ 仮定: 利得関数 $F(q_i, q_j)$ は q_i, q_j 共に2回微分可能である。

このときのReplicator方程式は、次のようなものとなる (Bomze(1990))。

$$\frac{dP}{dt}(B) = \int_B \left(\pi(x, P, \mu(S)) - \pi(P, P, \mu(S)) \right) P(dx)$$

定義3.3. CSS

定義: Eshel(1983) 戦略 q_u が連続的に安定な戦略(Continuously Stable Strategy, CSS)であるとは, (1) ESS である. (2) 任意の q_v について $|q_u - q_v| < \varepsilon$ を満たすような $\varepsilon > 0$ が存在し、任意の q_i について $|q_v - q_i| < \eta$ を満たすような $\eta > 0$ が存在し、次の関係を満たすときをいう。

$$(3.1) \quad F(q_v, q_i) > F(q_i, q_i)$$

$$\text{if and only if } |q_v - q_u| < |q_i - q_u|$$

平衡点 q_i^* からずれているとき q_i^* より q_i^* に近い突然変異戦略が必ず進入できる。したがって戦略は突然変異戦略の進入と置換の繰り返しによって平衡点 q_i^* に近づく。

命題3.4.

➤ 命題: Eshel(1983) $\hat{q}_i$ がESS であるための必要条件は、次の条件を満たすときである。

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \text{(i)} \quad & \left. \frac{\partial}{\partial q_j} F(q_j, \hat{q}_i) \right|_{q_j = \hat{q}_i} = 0, \\ \text{(ii)} \quad & \left. \frac{\partial^2}{\partial q_j^2} F(q_j, \hat{q}_i) \right|_{q_j = \hat{q}_i} \leq 0. \end{aligned}$$

⇒この条件は利得関数が極大であるための必要条件である。

命題3.5.

➤ 命題: Eshel (1983)

(i) ESS q_i が $q_i = q_j = \hat{q}_i$ において、CSS となる必要条件是次の条件を満たすときである。

$$(3.3) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_j} + \frac{\partial^2 F}{\partial q_i^2} \leq 0.$$

(ii) ESS $\hat{q}_i$ が CSS であるための十分条件は、(3.2)-(ii), (3.3) の等号を除いたものが成り立つことである。

ESS と CSS の関係

	(3.3)	Not (3,3)
(3.2)-(ii)	(i) 漸近安定	(ii) Lyapunov 安定
Not (3.2)-(ii)	(iii) ?	(iv) 漸近不安定

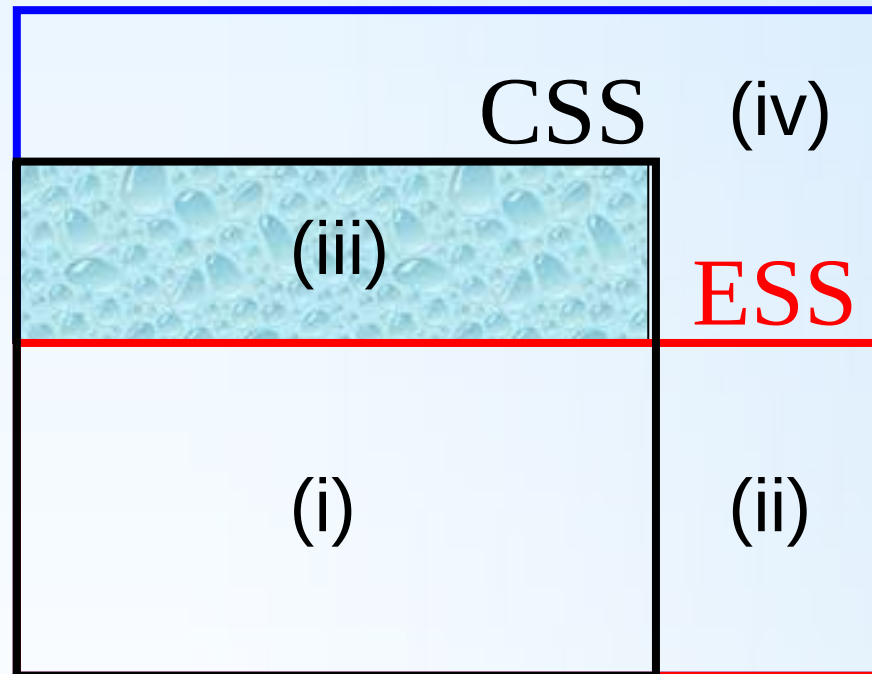
(i) 漸近安定な平衡点、(ii) Lyapunov安定

(iii) ESSでないがCSS(戦略の2極分化など興味深い Sasaki and Ellner(1995))

(iv) 不安定

NASH , ESS, CSS

NASH



定義3.6 MILNOR ATTRACTOR(Milnor 1985)

➤ 定義: A closed subset $A \subset M$ will be called an **(Milnor) attractor** if it satisfies two conditions:

(1) the *realm of attraction* $\rho(A)$, consisting of all points $x \in M$ for which $\varpi(x) \subset A$, must have strictly positive measure; and

(2) there is no strictly smaller closed set $A' \subset A$ so that $\rho(A')$ coincides with $\rho(A)$ up to a set of measure zero.

この定義には、その近傍の全ての軌道がそこに吸収されるという条件が含まれていない。よってアトラクターの近傍から離れていく軌道が存在してもよい。

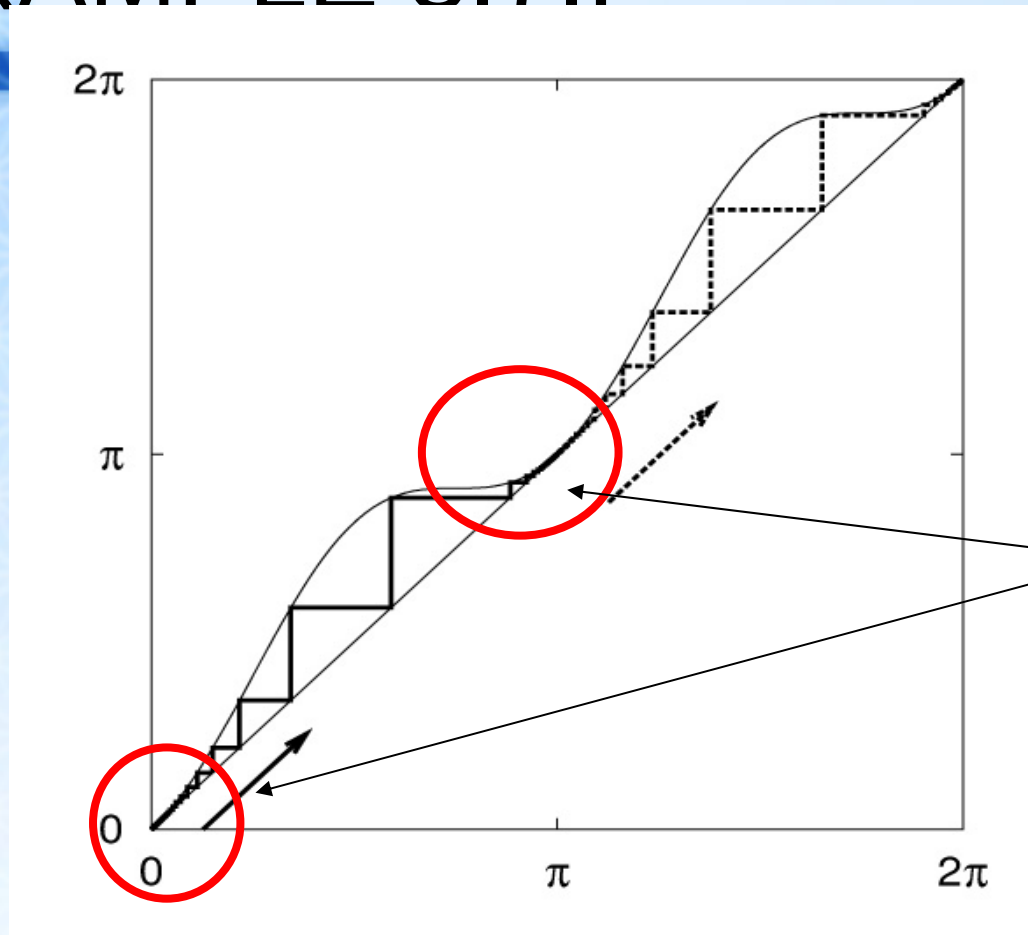
定義: ATTRACTOR

▶ 従来の意味でのアトラクター

定義: 力学系 f の閉不変集合 Λ がアトラクター(attractor) であるとは、 Λ の近傍 U で、 $f(U) \subset U$ かつ $\Lambda = \bigcap_{n \geq 0} f^n(U)$ となるものが存在することをいう。

よって従来の意味でのアトラクターとは、 Λ の近傍 U 内の点 f で写像された後も Λ の近傍内に留まり続けることを意味している。

EXAMPLE 3.7.:



Milnor Attractor

$x = 0, \pi$

$$f: [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi]$$

$$x_{n+1} = f(x_n) = x_n + \sin^2 x_n \pmod{2\pi}$$

命題3.8.

➤ 命題: ある均衡 $\hat{q}_i$ が Milnor Attractor であるための必要条件は次を満たすことをいう.

$$(3.4) \text{ (i)} \quad \left. \frac{\partial^2}{\partial q_j^2} F(q_j, \hat{q}_i) \right|_{q_j = \hat{q}_i} > 0.$$

$$(3.5) \text{ (ii)} \quad \left. \frac{\partial^2 F}{\partial \hat{q}_i \partial q_j} + \frac{\partial^2 F}{\partial \hat{q}_i^2} \right|_{q_i = q_j = \hat{q}_i} \leq 0.$$

⇒ 均衡は不安定であるが、均衡に近づいている軌道の集合が存在することを意味している。

3.2 KOLMOGOROV– ARNOLD – MOSER’S THEOREM, ARNOLD DIFFUSION

PERTURBATION THEORY
(Nearly Integrability)

吉川(2005, 2006, 2007)

近可積分系で重要な定理・事項

➤ Kolmogorov - Arnold - Moser (KAM)の定理:(アーノルド-アベス (1972))

$$H(=H_0(p)+H_1(p,q), \quad H_1(p,q+2\pi)_*=H_1(p,q) \ll 1)$$

が十分に小さいならば、ほとんどすべての ϖ

に対して、摂動系
$$\dot{p} = -\frac{\partial H_1}{\partial q}, \quad \dot{q} = \varpi_0(p) + \frac{\partial H_1}{\partial p}$$

の不変ドーナツ形 $T(\varpi^*)$ で $T_0(\varpi^*)$ に近いものが存在する。

→ 意訳: ノイズが存在しても, ゲームは壊れない.

➤ Arnold拡散 (Arnold, 1964)

→ 横断面に沿って, トーラスが崩壊・拡散していく.

→ 作用変数は保存量とならず、「ゆっくりと」運動する。(本論文では、外生的に)

命題 3.10. 均衡の安定性

- 考えられる均衡 (y^*, x^*) $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), \left(\frac{d}{b+d}, \frac{a}{a+c}\right)$
- (2.16)からJacobi行列:

$$\begin{pmatrix} (1-2y)\{a-(a+c)x\} & -(a+c)y(1-y) \\ -(b+d)x(1-x) & (1-2x)\{d-(b+d)y\} \end{pmatrix}$$

命題:

- 固有値の実根が負(→漸近安定となる条件)となるのは、

→ $(0,0)$: $a < 0, d < 0$, $(0,1)$: $c > 0, d > 0$, $(1,0)$: $a > 0, b > 0$

$(1,1)$: $b < 0, c < 0$

$$\left(\frac{d}{b+d}, \frac{a}{a+c}\right): \quad \frac{abcd}{(a+c)(b+d)} > 0$$

鞍点

$(a+c)(b+d) < 0$ リミット・サイクル

DETERMINISTIC NOISE: 定義3.9.

➤ Noise → 新規参入者の存在、Gale, et al. (1995) のアイデア

→ 選択方程式に $\delta_i \frac{l^1 + l^2}{2}$ の参入、退出するを導入。

先ほどと同様に, Replicator 方程式を導出。

ノイズがあるReplicator 方程式(3.6),(3.7):

$$\dot{y} = (1 - \delta_1)y(1 - y)\{a - (a + c)x\} + \delta_1 \left(\frac{1}{2} - y \right),$$

$$\dot{x} = (1 - \delta_2)x(1 - x)\{d - (b + d)y\} + \delta_2 \left(\frac{1}{2} - x \right)$$

$$0 < \delta_1, \delta_2 \ll 1$$

漸近安定な内点均衡の発生

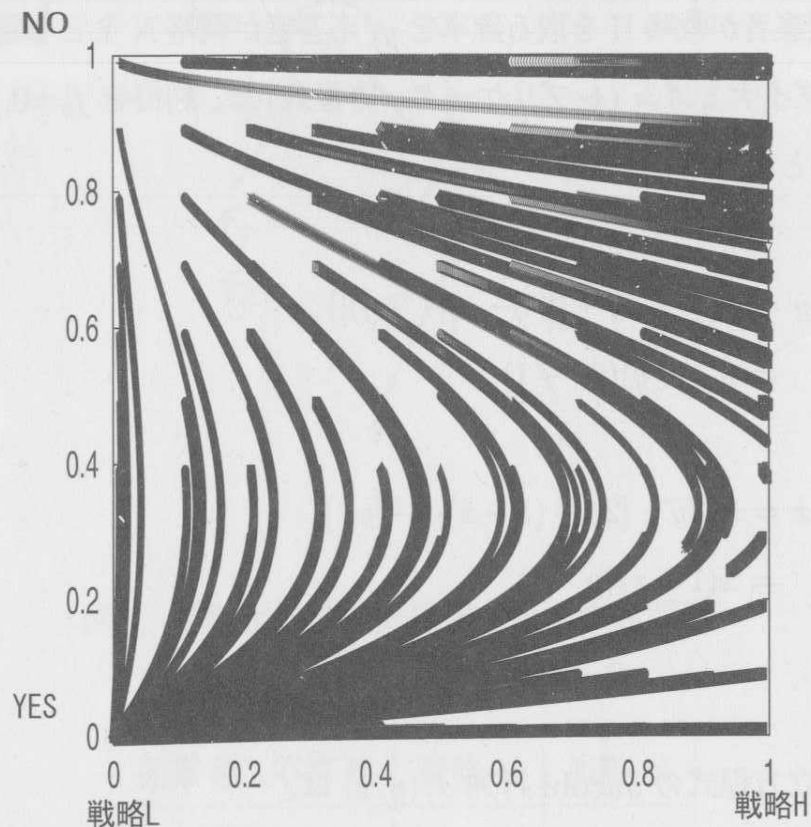
- 純粋戦略についての固有値は変更なし
- 内点解のJacobi行列

$$J^n\left(\frac{d}{b+d}, \frac{a}{a+c}\right) = \begin{pmatrix} -\delta_1 & -\frac{bd(a+c)}{(b+d)^2} \\ -\frac{ac(b+d)}{(a+c)^2} & -\delta_2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \frac{abcd}{(a+c)(b+d)} < 0$$

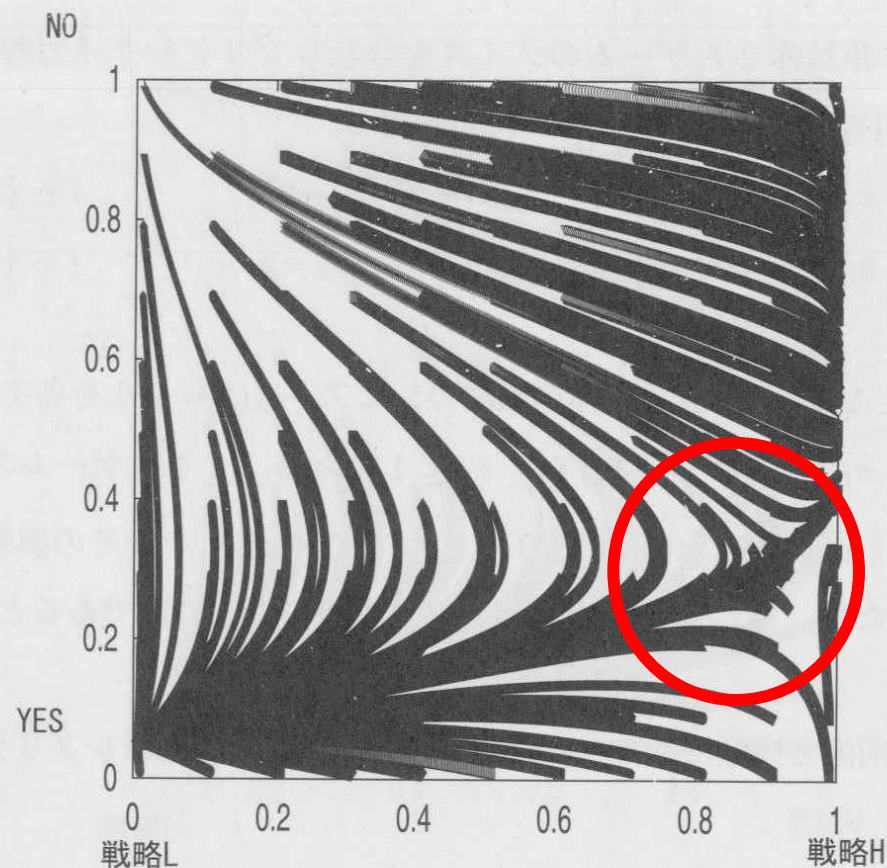
→ノイズの存在によって、漸近安定となる内点均衡は「鞍点」ではなく、「リミットサイクル」であると分かる。

EX: ULTIMATUM OFFER GAME



ノイズなし

図 2: ノイズがない場合



ノイズあり

図 3: ノイズがある場合 ($\delta_I = 0.01$, $\delta_{II} = 0.1$).

吉川満「非対称2人ゲームの大域的な分析とノイズの役割」『関西学院 経済学研究』
第36号 (2005), pp. 21-38. より転載

EXISTENCE

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{(1-\delta_2)\delta_1}{(1-\delta_1)\delta_2} = \frac{y(1-y)\{a-(a+c)x\}(\frac{1}{2}-x)}{x(1-x)\{d-(b+d)y\}(\frac{1}{2}-y)} \\ &= \frac{(d-\varepsilon)(b+\varepsilon)\{a-(a+c)x\}(1-2x)}{\varepsilon(b+d)(b-d+2\varepsilon)x(1-x)}\end{aligned}$$

$$\frac{a}{a+c} < x < \frac{1}{2} \quad \text{OR} \quad \frac{1}{2} < x < \frac{a}{a+c}$$

の範囲内で, 内点解が存在する.

FIRST INTEGRAL (Lyapunov関数)

2本のReplicator 方程式から導出(Hofbauer(1996), 吉川(2005))

Lotka-Volterra系ではHirsh and Smale(1977)に詳細が書かれている。

ゲームの状況からある値への関数:

→エントロピーの形をしている(→情報理論への発展性が可能)。

➤ ノイズなし

$$H = \log \frac{y^d (1-y)^b}{x^a (1-x)^c} = \log x^{-a} y^d + \log (1-x)^{-c} (1-y)^b, \quad \frac{dH}{dt} = 0$$

⇒ 保存系

➤ ノイズあり

$$H_n = \log \frac{y^d (1-y)^b (\frac{1}{2} - x)^{\delta_1}}{x^a (1-x)^c (\frac{1}{2} - y)^{\delta_2}}, \quad \frac{dH}{dt} \neq 0 \Rightarrow \text{近可積分系}$$

補足 (Hofbauer(JMB ,1996))

➤ この第1積分を物理学で議論されている近可積分系の議論に適用してもよいのか？

→ Hofbauer(1996)はこの第1積分は、次の正準方程式を満たすということを見出。

→ この第1積分は物理学で使われているHamiltonianである。

→ Hamilton 系 の議論ができることへの裏づけ。

$$\dot{x} = P(x, y) \frac{\partial H(x, y)}{\partial y}, \quad \dot{y} = -P(x, y) \frac{\partial H(x, y)}{\partial x},$$

$$\text{where } P(x, y) = x(1-x)y(1-y).$$

KAMの定理の成立(定理3.12.)

$$\frac{dH}{dt} = 0, \quad \frac{dH^n}{dt} \neq 0 \Rightarrow H^n \quad \text{は発散しないか?}$$

▶ Kolmogorov - Arnold – Morser (KAM)の定理は成立しているのか？(→ノイズが存在しても、ゲームが崩壊するのだろうか？)

ノイズを入れても, Lyapunov関数が発散しない値が正の測度で存在する。

→ ノイズを入れても, 不変トーラスの存在

証明: 連続性の証明法を使用.

近可積分系で重要な定理・事項(再掲)

➤ Kolmogorov - Arnold - Moser (KAM)の定理:(アーノルド-アベス (1972))

$$H(=H_0(p)+H_1(p,q), \quad H_1(p,q+2\pi)=H_1(p,q) \ll 1)$$

が十分に小さいならば、ほとんどすべての ϖ^*

に対して、摂動系
$$\dot{p} = -\frac{\partial H_1}{\partial q}, \quad \dot{q} = \varpi_0(p) + \frac{\partial H_1}{\partial p}$$

の不変ドーナツ形 $T(\varpi^*)$ で $T_0(\varpi^*)$ に近いものが存在する。

→ 意訳: ノイズが存在しても, ゲームは壊れない.

➤ Arnold拡散 (Arnold, 1964)

→ 横断面に沿って, トーラスが崩壊・拡散していく.

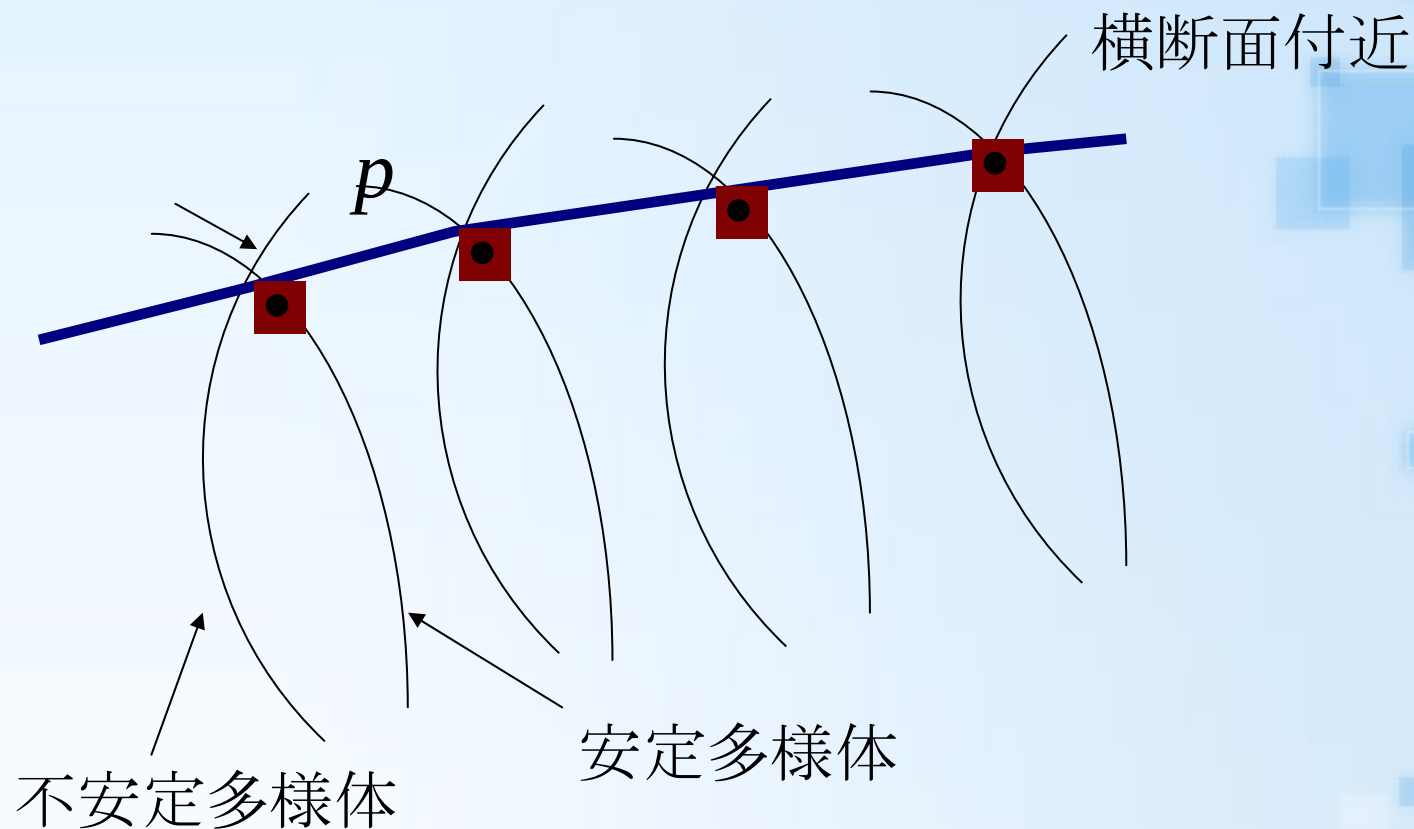
→ 作用変数は保存量とならず、「ゆっくりと」運動する。(本論文では、外生的に)

ARNOLD DIFFUSION

LOGIC:

1. KAMの定理により, 不変トーラスの存在.
2. 大域的に不安定なゲームにノイズを入れると, 局所安定な内点均衡が存在する.
3. 安定多様体と不安定多様体が交わる(Melnikov関数が0)となる点 p の存在.
→横断面の存在.
4. 遷移チェーンの存在. (Arnold(1964), Theorem 2)
5. それをつなぐ, 軌道の存在. (Arnold(1964), Theorem 3)

Arnold拡散の概念を図示

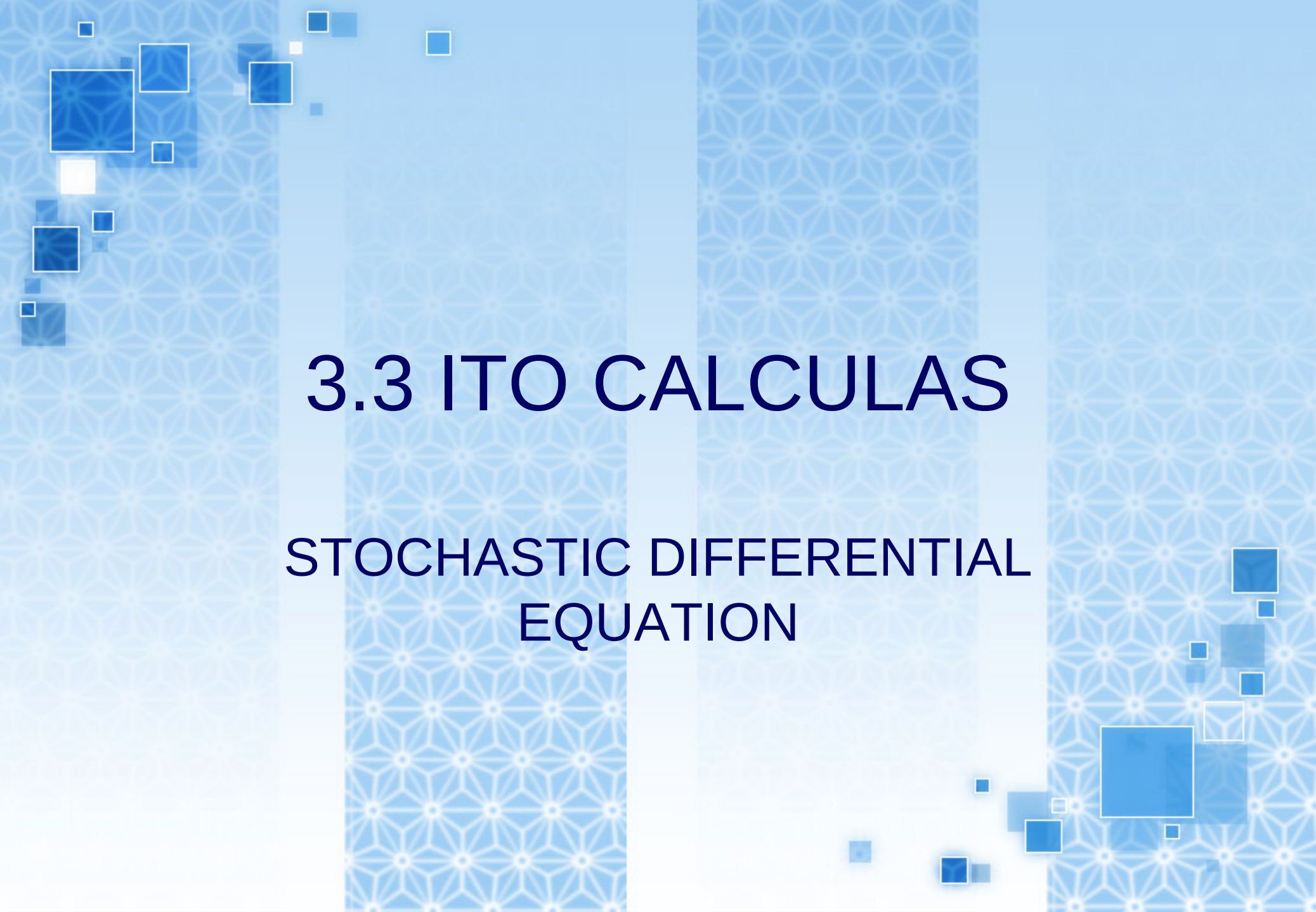


■● を連ねる軌道の存在

定理 3.11.

▶ 純粋戦略と混合戦略という複数均衡を持つ大域的に不安定なゲームに、ノイズが存在する場合、Arnold拡散が存在する.

→ 通常、Arnold拡散はMelnikovの方法を用いて、証明するが、本稿では、ゲーム理論の文脈から導出した。また、進化ゲーム理論の枠組みで、なおかつMinimal なモデルで証明した。

The background features a light blue geometric pattern of interconnected lines forming a star-like or honeycomb structure. Overlaid on this are several vertical bands of varying shades of blue. In the top-left and bottom-right corners, there are clusters of squares in different shades of blue, some with white outlines, creating a modern, abstract aesthetic.

3.3 ITO CALCULAS

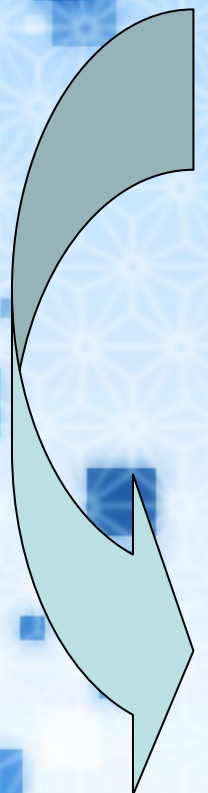
STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATION

定義3.14. ブラウン運動

➤ 定義: 確率空間 (Ω, F, P) 上の確率過程 $w := (w_t)_{t \in F}$ で以下の3条件 (i)-(iii) を満たすものを (7上標準)ブラウン運動(Brownian motion) と呼ぶ.

- (i) $w_0 = 0$. (ii) w は連続過程
- (iii) w は独立で正規分布する増分をもつ、すなわち、
に対して $0=t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$
 - (a) $w_{t_{i+1}} - w_{t_i} \ (i = 0, \cdots, n-1)$ は互いに独立,
 - (b) $(w_{t_{i+1}} - w_{t_i}) \sim N(0, t_{i+1} - t_i)$.

確率微分方程式(Fudenberg and Harris (1992))


$$(3.8) \quad dr_i(t) = r_i(t) \left[u_i(r(t)) dt + \sigma_i dW_i(t) \right].$$

ただし, $u_i(r)$ はタイプ i の期待利得, W を分散1で、共分散0の n 次元 Wiener 過程である。これを伊藤の公式を利用すると、次のようなReplicator方程式が得ることができる。

$$(3.9) \quad ds_i = \sum_j \left[\frac{\partial f_i(r)}{\partial r_j} \right] dr_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \left[\frac{\partial^2 f_i(r)}{\partial r_j \partial r_k} \right] dr_j dr_k,$$

ただし $dr_j dr_k = r_j^2 \sigma_j^2 dt$ if $j = k$, and 0 otherwise.

定理3.15. 伊藤の公式

➤ 定理: (Ito's Formula) $a = a(t, \omega)$ は t に関して連続な適合格程とし、 $v = v\{v(t, \omega)\} \in L^*$ とする。確率過程 $X = \{X_t\}$ を

$$dX_t = a dt + v dB_t, B_0 = 0, a.s.$$

とする。すなわち, a.s. で, X は次で定義される。

$$(3.10) \quad X_t(\omega) = X_0(\omega) + \int_0^t a(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dB_s$$

$\mathbb{R}^2$ 上の C^2 級数 $f(x, t)$ と $X = X$ の合成で得られる確率過程を $Y = f(X, t)$ とする。このとき次が成立する。

$$(3.11) \quad dY_t = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (dX_t)^2$$

ただし, $(dX_t)^2 = (adt + vdB_t)^2$ は

$$(3.12) \quad dt \cdot dt = dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0, dB_t \cdot dB_t = dt$$

として計算する。すなわち、 $(dX_t)^2 = v^2 dt$ になる。確率過程の微分式(3.9)は、任意の $T \geq 0$ について、次が成立することを意味する。等式はすべて a.s. の意味である。

$$(3.13) \quad f(X_T, T) - f(X_0, 0) = \int_0^T \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot v^2 + \frac{\partial f}{\partial x} a \right\} dt + \int_0^T \frac{\partial f}{\partial x} v dB_t$$

例3.16. 戦略が2つの場合

➤ 戦略が2つの場合, (3.9) は次のようになる。

$$\begin{aligned} ds_1 &= s_1 s_2 [(u_1(s) - u_2(s)) dt + (\sigma_2^2 s_2 - \sigma_1^2 s_1) dt \\ &\quad + \sigma_1 dW_1 - \sigma_2 dW_2], \\ (3.14) \quad &= s_1 s_2 [(u_1(s) - u_2(s)) dt + (\sigma_2^2 s_2 - \sigma_1^2 s_1) dt \\ &\quad + \sigma d\tilde{W}], \end{aligned}$$

ただし $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$, $\tilde{W} = (W_1 - W_2) / \sigma$ は標準 Wiener 過程である。

命題3.17. (Fudenberg and Harris (1992)) 戦略が2つで、対称2人ゲームの場合

➤ 命題:(i) $a-c > (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)/2d - b < (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)/2$ のとき、
 $t \rightarrow \infty$ のとき、確率1で、 $s_1(t) \rightarrow 1$ となる。

(ii) $a-c < (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)/2d - b < (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)/2$ のとき、
 $t \rightarrow \infty$ のとき、確率1で、 $s_1(t) \rightarrow 1$ となる。

(iii) $a-c > (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)/2d - b > (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)/2$ のとき、
 $t \rightarrow \infty$ のとき、確率 $I_1/(I_1 + I_2)$ で、 $s_1(t) \rightarrow 1$
となり、確率 $1 - I_1/(I_1 + I_2)$ で、 $s_1(t) \rightarrow 0$ となる。

ただし、 $I_1 = \int_{s_1(0)}^{s_1(0)} \exp \left[- \int_x^{x^1} [2\alpha(y) / \beta^2(y)] dy \right] dx,$
 $I_2 = \int_{s_1(0)}^1 \exp \left[- \int_z^{z_x} [2\alpha(y) / \beta^2(y)] dy \right] dx.$ である。

3.4 STATISTICAL MECHANICS

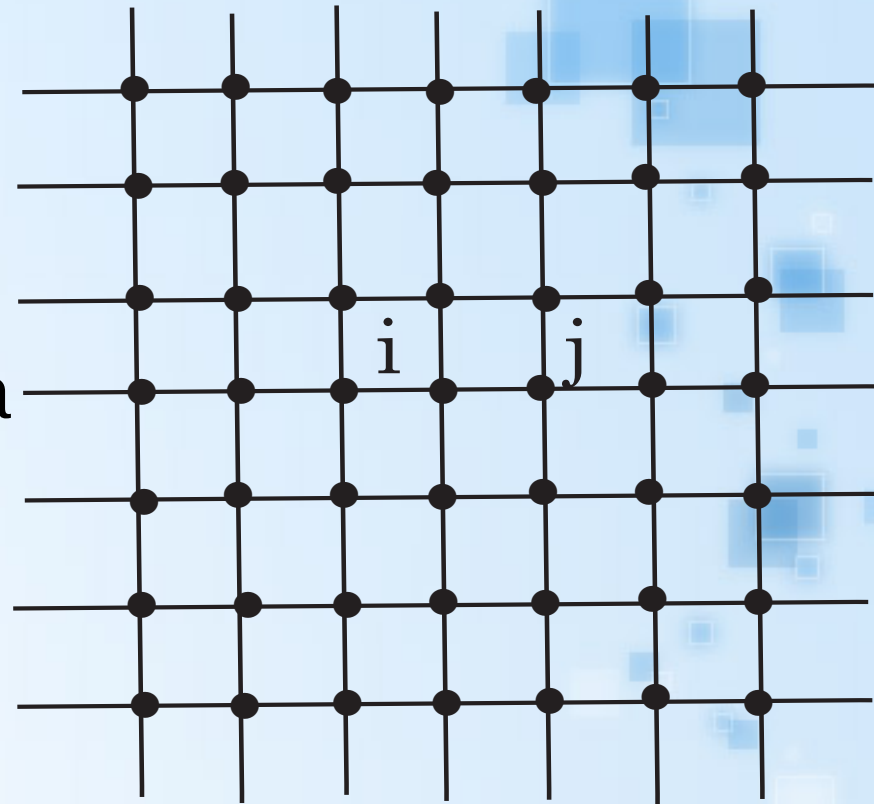
ISING MODEL, SK MODEL

吉川(2008)

MODEL:

Game: 2 types Strategy, 2 types Agent

- 多数の人がおり、2タイプの主体が1対1で出会い、2つの戦略を用いて、ゲームをする。
- In Sec.2, player i and j play a Game with Nearest Neighbor Interaction.
- In Sec.3, player i and j play a Game with Random Matching



LATTICE

EXAMPLE

	S1(1)	S2(2)
S1(1)	A,A	0,0
S2(2)	0,0	B,B

	S1(-1)	S2(+1)
S1(-1)	A,A	0,0
S2(+1)	0,0	B,B

where $A, B > 0$, $|A|=|B|$

Ising Model (Very Simple)

仮定2.4，命題 3.18.

ASSU.: 各主体は高い利得・適応度を得ることを望んでいる。

PROP.: 仮定のもとで主体 x のある戦略 $\{s_i\}, i = 1, \dots, N$ を取り、ある利得 f を得るというゲームの状況下に戦略の分布は

$$P(\{s_i\}) = Z^{-1} \exp(\gamma f)$$

となる。ただし $\{s_i\}$ は主体 i の戦略、 γ は変数（例えば、正の情報）、 f はある戦略 $\{s_i\}$ を取ったときの利得・適応度、 Z は規格化定数を表している。

➤ **INTERPRETATION:** : 利得が高ければ、その戦略をとる確率が高い。

➤ **DISTINCTIVE:** STATICS, Non-Externality

TRADITIONAL EVOLUTIONARY GAME

- **ASSU.**: 各主体は高い利得・適応度を得ることを望んでいる.
- Under this assumption, we obtain the unique solution: Selection Dy. → Replicator Eq. Replicator Eq.

$$\dot{x}_i = x_i \left(f_i - \bar{f} \right), i = 1 \cdots, N.$$

INTERPRETATION: ある*i*番目の戦略は平均利得・適応度よりも高ければ、その戦略を確率1で選択する。

DISTINCTIVE: DYNAMICS, EXTERNALITY

定義3.19. 秩序パラメータ

DEF.: 戦略が一定の秩序を持っているかどうかを判断する量を秩序パラメータ(order parameter) という概念を次のように導入する。

$$(3.16) \quad m = \langle s_i \rangle = \frac{1}{N} \sum_i s_i \equiv \sum_i s_i P(\{s_i\})$$

where $\langle \quad \rangle$ stands for the average.

EXAMPLE

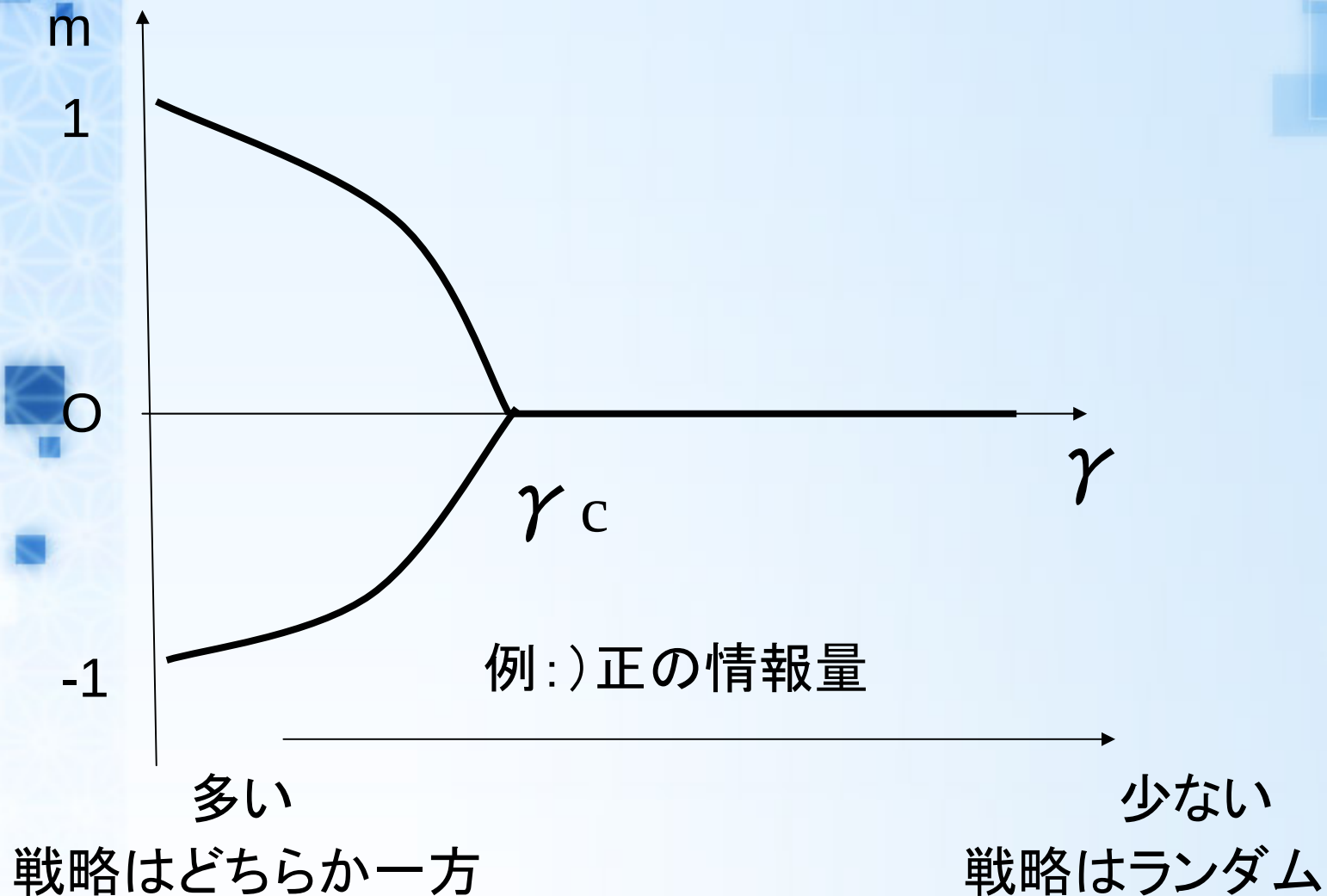
➤ 先ほどのEXAMPLEで考える。このとき、
戦略1を確率1でとる場合、 $m = 1/2$,
戦略2を確率1でとる場合、 $m = 1$,
戦略1と2をランダムにとる場合、 $m = 3/4$.

→ m の値は、 $1/2 \leq m \leq 1$ の間で、 $m = 1/2$ に近ければ、
戦略1を取る人が多いと分かり、 $m = 1$ に近ければ、戦
略2を取る人が多い。

	S1(1)	S2(2)
S1(1)	A,A	0,0
S2(2)	0,0	B,B

➤ **EXAMPLE** : Ising type

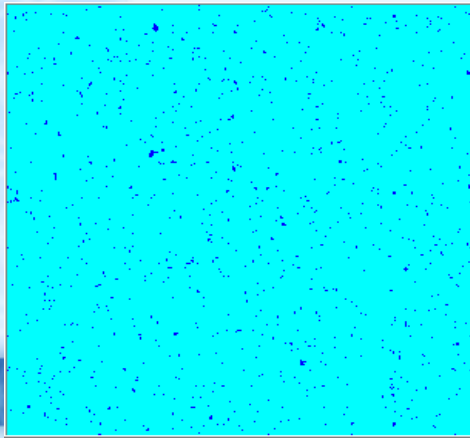
➤ $s_i = \{-1, 1\} \rightarrow m = -1, 0(\text{random}), 1$



SIMULATION

先ほどの分岐図は、格子図で見ると、次のような図である。

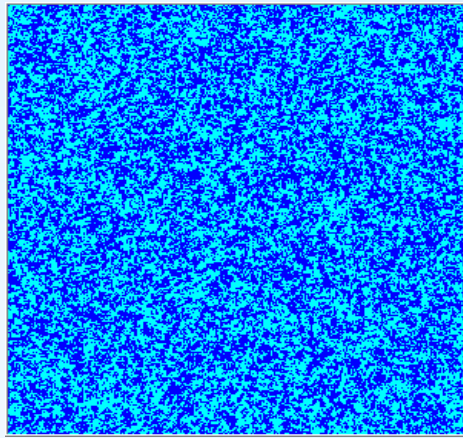
SKY BLUE = Strategy 1、INDIGO = Strategy 2



ORDERED TYPE 1

$$m^* > 0$$

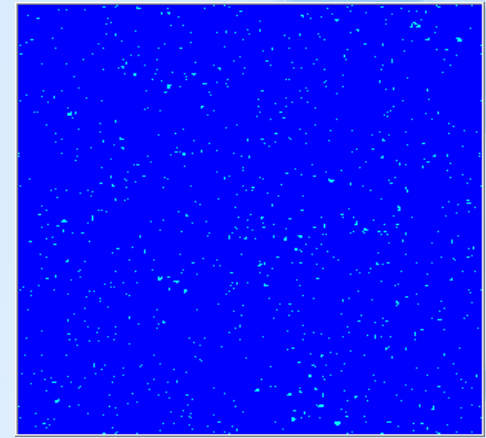
(s1, s1)



NO ORDERED

$$m^* = 0$$

s1とs2
がRandomに選択



ORDERED TYPE 2

$$m^* < 0$$

(s2,s2)

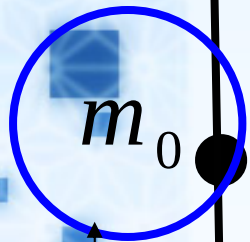
ORDERED PARAMETER IN REPLICATOR SYSTEM

最も単純な戦略が2つの対称2人ゲームにおいて、REPLICATOR 方程式は

$$\dot{x} = \{(a+b)x - b\} x(1-x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

このときの平衡点 (Nash均衡) は、

$$x^* = 0, 1, 0 < \frac{b}{a+b} < 1$$



我々が定式化したものはなかった。

ORDERED PARAMETER has **three points** (corner point(-1,+1), interior point) in RE. SYS.

命題 2.21: CHARACTERIZE ESS

PRO.: Bishop and Cannings(1976): $q_i \in Q_i$ is evolutionary stable strategy if and only if it meets these first-order and second-order best-reply :

$$(2.7) \quad F(y, x) \leq F(x, x), \quad \forall q_j, \quad \leftarrow$$

Nash Eq.

$$(2.8) \quad \begin{aligned} &F(y, x) = F(x, x) \\ &\Rightarrow F(y, y) < F(x, y), \end{aligned} \quad \forall q_j \neq q_i,$$

Asymptotic Stable
Conditon

命題3.20.

PRO.: 統計力学を用いた進化ゲーム理論において、進化的に安定な戦略とは次の条件を満たすことと同値である.

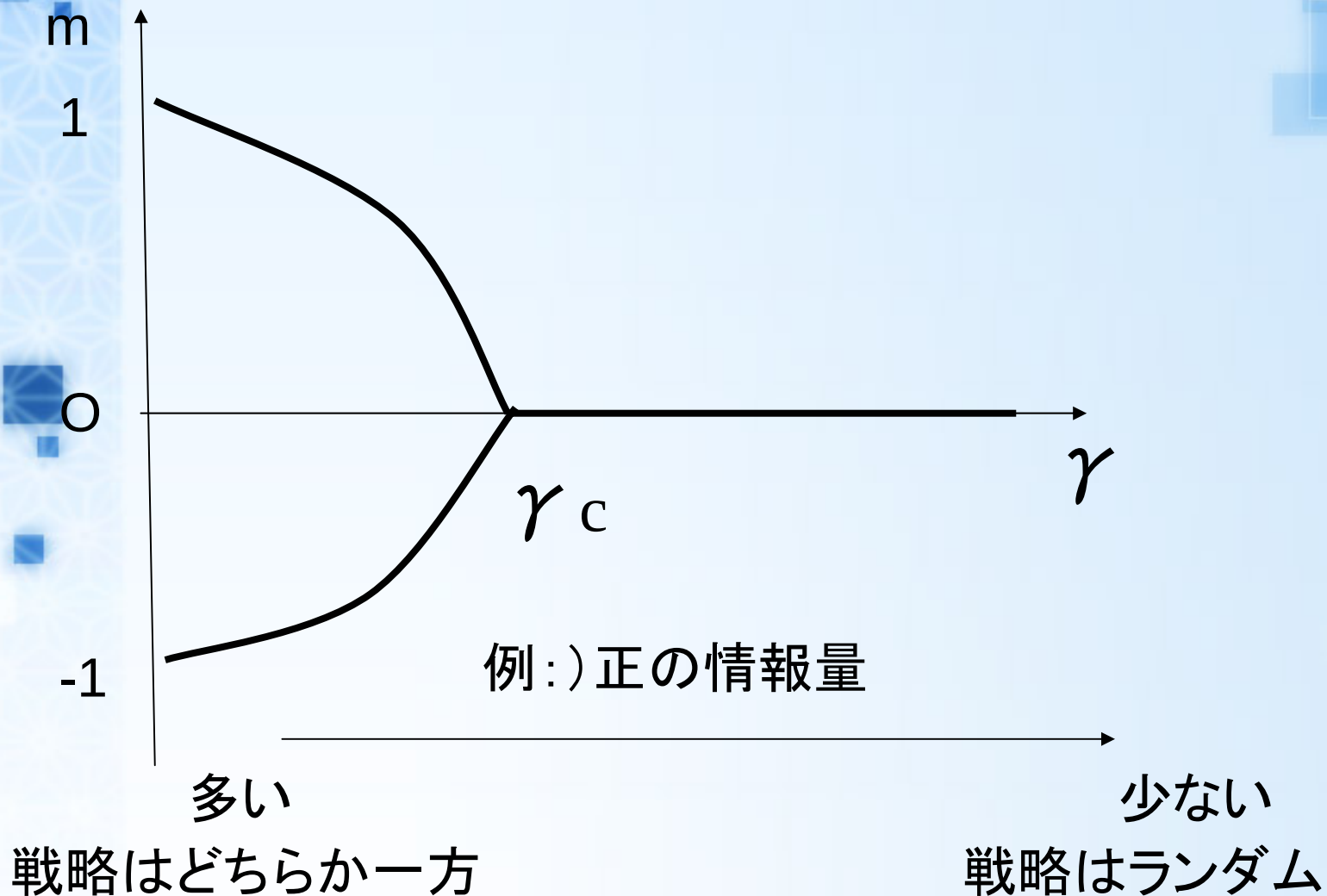
$$(3.17) \quad u(y, x) \leq u(x, x), \quad \forall y,$$

$$(3.18) \quad |m - m^*| < \varepsilon, \quad \text{Lyapunov Stable Condition}$$

where, m^* stands for the index of the strategy

➤ **EXAMPLE:** Ising type

➤ $s_i = \{-1, 1\} \rightarrow m = -1, 0(\text{random}), 1$



ASYMMETRIC TWO PERSON GAME

➤ 秩序パラメータをもう1つ定義し、ESSについては、命題3.20. の(3.18)の条件を次のように修正すれば、足る。

$$\left| m'_1 - m^*_1 \right| < \varepsilon_1 \quad , \quad \left| m'_2 - m^*_2 \right| < \varepsilon_2$$

Futher Works

➤ 統計力学の空間性に着目

1. 正方格子ではなく、いろいろな格子、グラフ
→(random) Graph理論、Percolation

2. 戦略の空間パターンに着目

→Fractal 理論

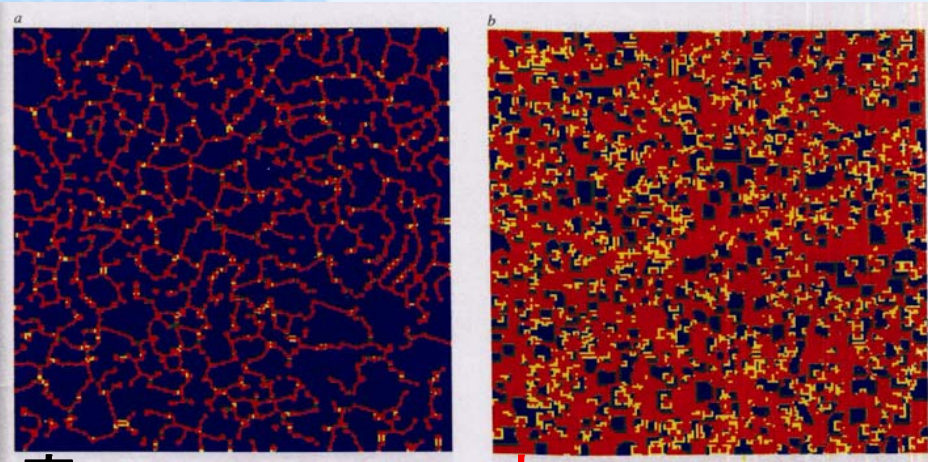
➤ (触れなかった)繰り返しゲーム

→確率過程 (Path-Dependent, 条件付き期待値,
マルチンゲール, ランダム停止時刻など)

→Kandori, Mailath and Rob(1993,
Econometrica)の拡張など

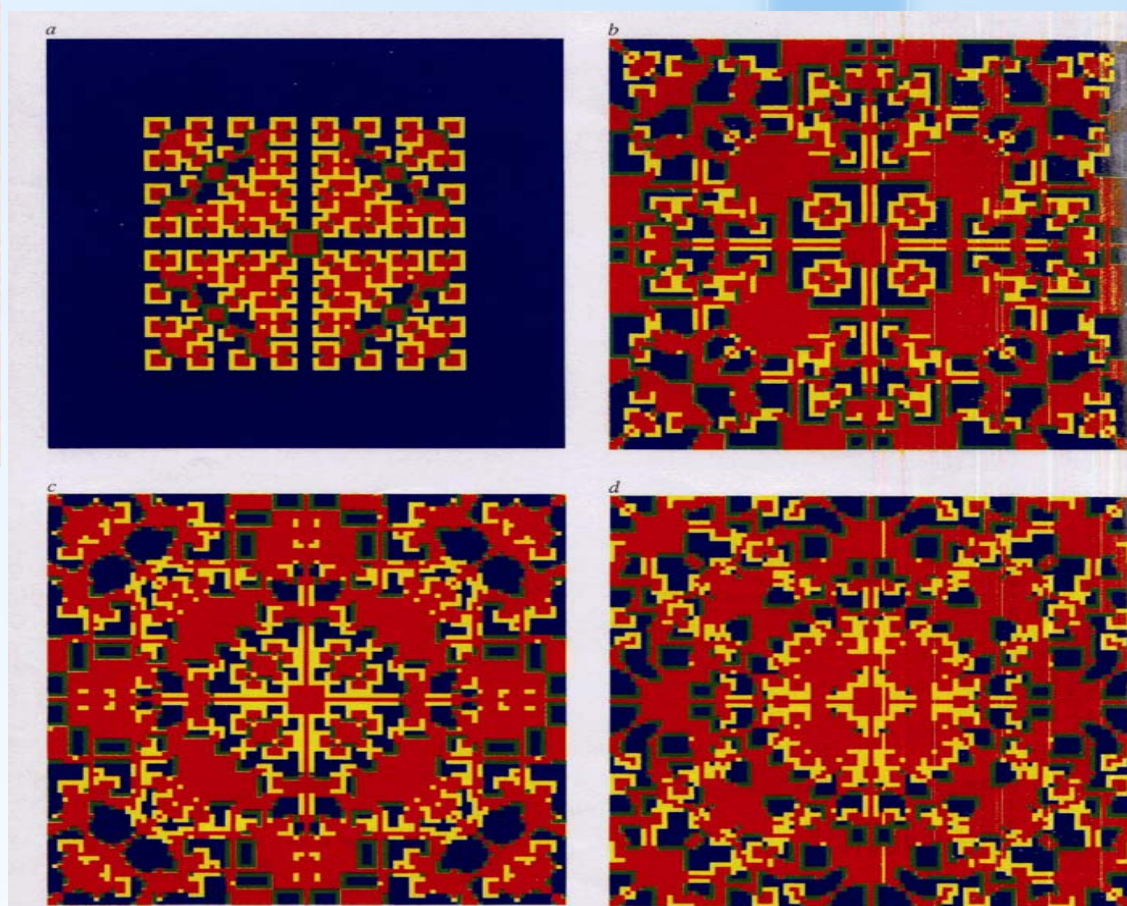
⇒現在の応用重視の「浅く・広く」 → 「専門化」への
シフトを望む。そのためには、多くの参入が望まれる。

EX. :SPATIAL PRISONER'S DILEMMA GAME, Nowak and May(Nature, 1992)



青:C(cooperate), 赤D (defect)

黄 D following a C, 緑 C following a D



PERCOLATION は存在しないが、* 無限クラスターは存在する。

The background of the slide features a repeating geometric pattern of light blue stars or snowflakes on a darker blue background. This pattern is contained within vertical bands that are separated by lighter blue vertical stripes. In the top-left and bottom-right corners, there are clusters of squares in various shades of blue, some of which are slightly offset or layered, creating a sense of depth and movement.

4. SUMMARY

確率論としてのGame THEORY を定式化した。

Von Neumann

「数学者はさまざまな領域のどれを選んで研究してもよいし、その選択やその結果としての成功の度合いは、主として審美的な価値によって影響されるのが普通であるけれども、経験的な源泉からあまりに遠く離れると、数学はその創造的な力を失う」

と警告している。

⇒理論と応用研究の相互依存関係が重要に。

+

大物の数学者は「社会科学」にも自分の理論を適用してみたい？

Fin

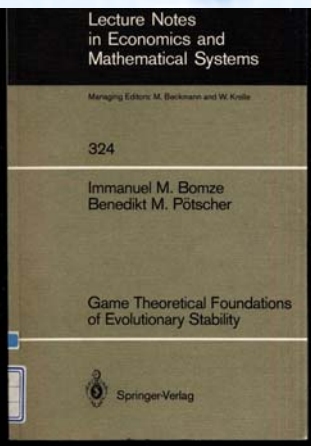
REFERENCE

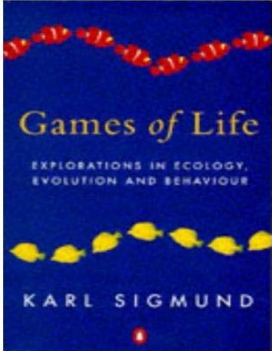
- [1] Arnol'd, V.I. (1964): *Soviet Math. Dokl.* **5**, 581.
- [2] Arnol'd, V.I. and Avez, A. (1968): *Ergodic Problems of Classical Mechanics*, Benjamin, New York.
- [3] Bishop, D.T. and Cannings, C. (1976): *Adv. Appl. Prob.* **8**, 616.
- [4] Bomze, I. (1990): *Monatsch. Math.* **110**, 189.
- [5] Eshel, I. (1983): *J. Theor. Biol.* **103**, 99.
- [6] Fudenberg, D. and Harris, C. (1992): *J. Econ. The.* **57**, 420.
- [7] Kakutani, S. (1941): *Duke Math. J.* **8**, 457.
- [8] 吉川満 (2005): 『関西学院 経済学研究』, **36**, 21.
- [9] 吉川満 (2006): 『関西学院 経済学研究』, **37**, 305.
- [10] 吉川満 (2007): 『進化経済学論集』, **11**, 450.
- [11] 吉川満 (2008): 『京都大学数理解析研究所講究録』印刷中.
- [12] 河野敬雄 (2003): 『Rokko Lectures in Mathematics』, **13**.
- [13] Milnor, J. (1985): *Comm. in Math. Phys.* **99**, 177.
- [14] Sasaki, A. and Ellner, S. (1995): *Evolution*, **49**, 337.
- [15] 鈴木光男 (1994): 『新ゲーム理論』 勁草書房.

BOOK GUIDE(EVOLUTIONARY GAME THEORY)



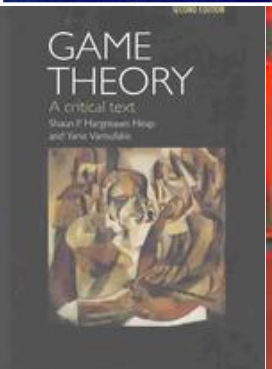
1. 生物の適応戦略: ソシオバイオロジー的視点からの数理生物学, 巖佐庸, サイエンス社 1981/10.
2. Evolution and the Theory of Games
John Maynard Smith, Cambridge Univ Pr, 1982/10 . (日本語訳あり)
3. 繁殖戦略のモデル, 山村則男, 東海大学出版会, 1986/6.
4. 数理生物学入門—生物社会のダイナミクスを探る, 巖佐庸, 共立出版, 1990, 1998.
5. Game Theoretical Foundations of Evolutionary Stability, Immanuel M. Bomze Benedikt M. Poetscher, Springer-Verlag, 1989.
6. The Stability Concept of Evolutionary Game Theory, R. Cressman, Springer-Verlag, 1992.





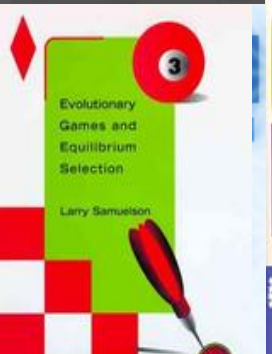
7. Game of Life, Karl Sigmund, Oxford University, Press, 1993. (日本語訳あり)

8. Evolutionary Game Theory, Jorgen W. Weibull, MIT Press, 1995. (日本語訳あり)



9. Game Theory, A critical text, Shaun P.Hargreaves Heap and Yanis Varoufakis, Routledge, 1995, 2nd : 2004.(日本語訳あり)

10. Evolution, Games and Economic Behaviour, Fernando Vega-Redondo, Oxford Univ Press, 1997.



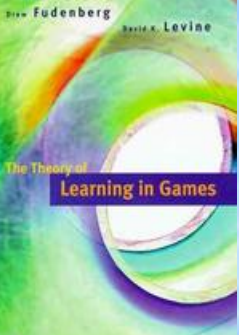
11. Evolutionary Games and Equilibrium Selection, Larry Samuelson, MIT Press, 1997.

12. はじめてのゲーム理論, 中山幹夫, 有斐閣, 1997.



13. 信頼の構造—こころと社会の進化ゲーム, 山岸俊男, 東京大学出版会, 1998/05.

14. Evolutionary Games and Population Dynamics, Josef Hofbauer Karl Sigmund , Cambridge Univ Pr, 1998.(日本語訳あり)



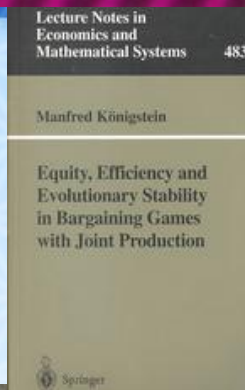
15. Theory of Learning in Games, Drew Fudenberg, David K. Levine, MIT Press, 1998.



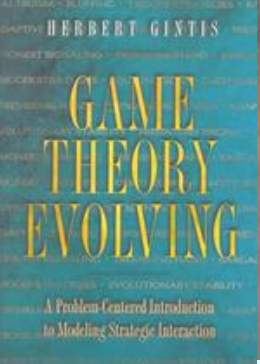
16. 複雑系の進化的シナリオ, 金子邦彦, 池上高志, 朝倉書店, 1998.



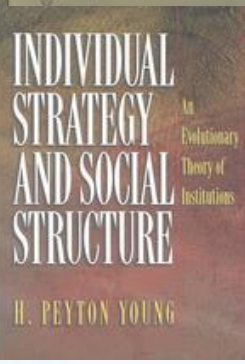
17. 生き物の進化ゲーム, 酒井 聡樹, 近 雅博, 高田 壮則, 共立出版, 1999.



18. Equity, Efficiency and Evolutionary Stability in Bargaining Games with Joint Production, Manfred Königstein, Springer-Verlag, 2000.



19. Game Theory Evolving : A Problem-Centered Introduction to Modeling Strategic Interaction ,Gintis, Herbert, Princeton Univ Pr, 2000.



20. Individual Strategy and Social Structure: An Evolutionary Theory of Institutions, Peyton Young, Princeton Univ Pr, 2001.



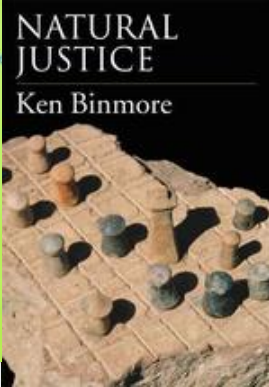
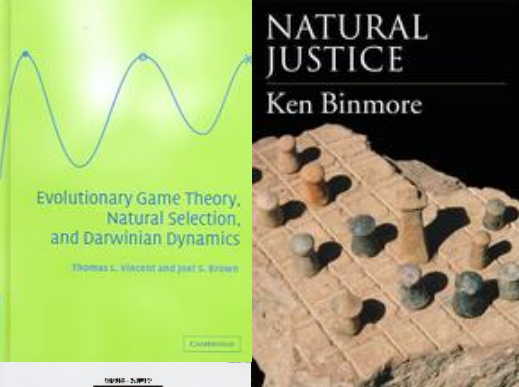
21. Toward a Comparative Institutional Analysis, Masahiko , Aoki, MIT Press, 2001.(日本語訳あり)



22. ゲーム理論と寡占, 田中靖人, 中央大学出版部, 2001.

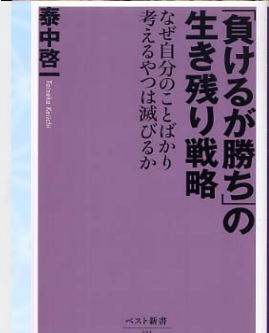


23. ゲーム理論入門, 武藤滋夫, 日経文庫, 2001.
24. 進化的意思決定, 石原 英樹, 金井 雅之, 朝倉書店, 2002.
25. 進化ゲームとその展開, 佐伯胖, 亀田達也, 共立出版, 2002 .
26. 慣習と規範の経済学, 松井彰彦, 東洋経済新報社, 2002.
27. Evolutionary Dynamics and Extensive Form Games, Ross Cressman, MIT Press, 2003.
28. Strategic Learning and Its Limits, H. Peyton Young, Oxford Univ Pr , 2004.
29. 進化経済学の数理入門 , 有賀 裕二, 共立出版, 2004.
30. ゲーム理論と進化ダイナミクス—人間関係に潜む複雑系, 生天目 章, 森北出版, 2004.



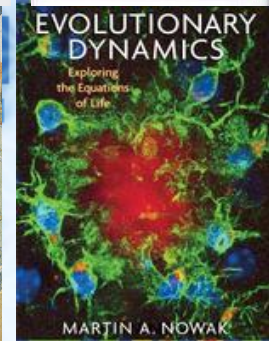
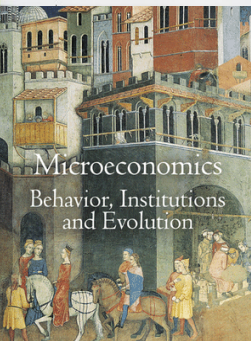
31. Evolutionary Game Theory, Natural Selection And Darwinian Dynamics, Thomas L. Vincent Joel S. Brown, Cambridge Univ Pr, 2005.

32. Natural Justice, K. G. Binmore, Oxford Univ Pr, 2005.



33. ゲーム理論のフロンティア, 池上高志, 松田裕之, サイエンス社, 2005.

34. 「負けるが勝ち」の生き残り戦略, 秦中啓一, ベスト新書, 2006.



35. Microeconomics: Behavior, Institutions, and Evolution, Samuel Bowles, Princeton University Press, 2006.

36. Evolutionary Dynamics, Martin A. Nowak, Belknap Pr , 2006.(日本語訳: 近日出版予定)

37. 人間行動に潜むジレンマ—自分勝手はやめられない? ,大浦 宏邦, 化学同人, 2007.



38. 進化ゲーム理論と遺伝的アルゴリズム, 梅原嘉介, 小川敬治, 工学社, 2007.

(注): 進化ゲーム理論関連で認識しているもののみ