Cournot 市場から始めるゲーム理論入門- 囚人のジレンマゲーム -

Mitsuru KIKKAWA
Meiji University
ver.2010/04/26

0. はじめに

本講義の目的は複占市場[1)]で最も基本的なモデルである Cournot 市場を用いて、ゲーム理論の基本的な事項を学んでいくことである。特に Cournot 市場における Nash 均衡は Pareto 最適な状態とは異なるため、囚人のジレンマの構造をしていることが知られている。そのため経済学の立場でこの Cournot 市場を考えると、いかにすると Pareto 最適な社会状態に移行できるのかという問題と深く関連しており、今日でも盛んに研究されている。

特にここにおいて、ゲーム理論の内容は主に岡田 [3] を参考にしている。またこの辺の内容は、Gibbons [2] が分かりやすく薦められる。

1 基本モデル

2 つの企業 1 と 2 が同質な財を生産し、市場に供給している。企業 $i(=1,2)$ の供給量を $q_i \geq 0$ とすると、財の価格 p は次の逆需要関数によって決まる。

$$p = \max\{a - b(q_1 + q_2), 0\}, a, b > 0$$

企業 i の費用関数を次のようにおく。

$$C_i(q_i) = c_i q_i, 0 < c_i < a$$

ここで c_i は企業 i が財 1 単位を生産するための限界費用を表す。このときの企業 i の利潤は次のようになる。

$$\pi_i(q_1, q_2) = pq_i - c_i q_i.$$

ここで各企業はそれぞれの利潤の最大化を目標として、それぞれ独立に決定する。

$$\begin{aligned}\pi_1(q_1, q_2) &= (a - c_1 - bq_1 - bq_2)q_1, \\ &\qquad\qquad \text{if} \quad 0 \leq q_1 \leq \frac{a}{b} - q_2 \\ &= -c_1 q_1 \qquad \text{if} \quad \frac{a}{b} - q_2 \leq q_1\end{aligned}$$

これより、企業 1 の最適応答対応は次のようになる。

$$\begin{aligned} q_1^* &= \frac{a - c_1}{2b} - \frac{q_2}{2} && \text{if} \quad 0 \leq q_2 \leq \frac{a - c_1}{b} \\ q_1^* &= 0 && \text{if} \quad \frac{a - c_1}{b} < q_2 \end{aligned}$$

同様にして、企業 2 の最適応答対応は次のようになる。

$$\begin{aligned} q_2^* &= \frac{a - c_2}{2b} - \frac{q_1}{2} && \text{if} \quad 0 \leq q_1 \leq \frac{a - c_2}{b} \\ q_2^* &= 0 && \text{if} \quad \frac{a - c_2}{b} < q_1 \end{aligned}$$

これらから次のように、Nash 均衡が求まる。

$$q_1^* = \frac{a - 2c_1 + c_2}{3b}, \quad q_2^* = \frac{a + c_1 - 2c_2}{3b}.$$

ただし $a - 2c_1 + c_2 > 0, a + c_1 - 2c_2 > 0.$

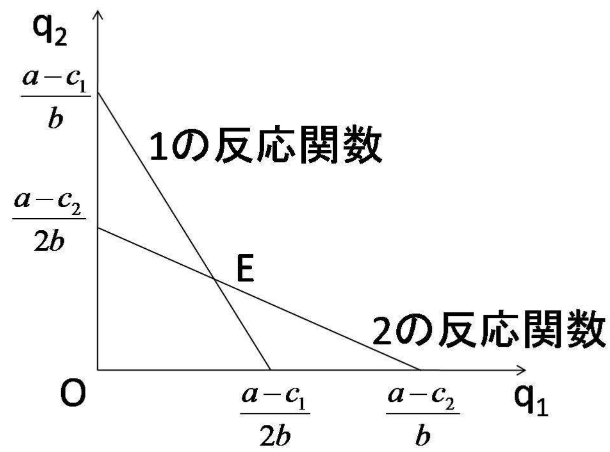

図 1: 企業の最適応答対応

このときの価格は $p^* = \dfrac{a + c_1 + c_2}{3}$ であり, 各企業の利潤は次のようになる。

$$\pi_1^*(q_1^*, q_2^*) = \frac{(a - 2c_1 + c_2)^2}{9b}, \pi_2^*(q_1^*, q_2^*) = \frac{(a + c_1 - 2c_2)^2}{9b}.$$

次にこの Cournot 市場が囚人のジレンマゲームであることを示す。よってここではこのゲームにおける各企業の利潤が Pareto 最適[2)] ではないことを示す。

[1)] ある財を供給している企業が 2 つしかないような市場を複占市場という。例えば航空産業は ANA と JAL のほぼ 2 社で市場を占有している。

[2)] **定義** 戦略形 n 人ゲーム $G = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{f_i\}_{i \in N})$ において戦略の組 $s = (s_1, \cdots, s_n)$ が戦略集合 $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ に関して Pareto 最適であるとは、すべてのプレイヤー $i(=1, \cdots, n)$ に対して、

特にここでは簡単化のために $c_1 = c_2 = c$ とする。ここで仮に企業間で協調、協力し、生産量を決定する場合を考える。このときの 2 企業の総利潤は次のようになる。

$$\pi_1(q_1, q_2) + \pi_2(q_1, q_2) = (p - c)(q_1 + q_2)$$

総利潤を最大にする総供給量 $(\bar{q}_1, \bar{q}_2)$ は、次のように求まる。

$$\bar{q}_1 + \bar{q}_2 = \frac{a - c}{2b}$$

ここで 2 つの企業は同質で供給量が等しいとすると、次のようになる。

$$\bar{q}_1 = \bar{q}_2 = \frac{a - c}{4b}$$

このときの財の価格と企業の利潤は次のようになる。

$$\bar{p} = \frac{a + c}{2}, \quad \bar{\pi}_1(\bar{q}_1, \bar{q}_2) = \bar{\pi}_2(\bar{q}_1, \bar{q}_2) = \frac{(a - c)^2}{8b}.$$

このとき 2 つの企業は均衡利潤 $\dfrac{(a - c)^2}{9b}$ より高い利潤を得るため、Nash 均衡は Pareto 最適ではない。そのため囚人のジレンマと言われるゲームであることが分かる。

2 展開形ゲーム：不確実性

次に先ほどの基本モデルに景気の良し悪しがある場合を考える。特にここでは簡単化のために各企業の戦略は 2 つ、高水準 (q_i^H)、低水準 (q_i^L) のどちらかで財を供給するとする。財の価格は市場における需要関数によって決まるが、市場の状態は好景気 (G) と不景気 (B) の 2 通りとする。このときの各企業の意思決定は次の図のような木の形で表現することができる。

この図において、木の底点 0_1 はゲームの出発点であり、ここで市場の状態が好景気 (G) か不景気 (B) かが決定される。この景気は企業の意思決定とは独立にある偶然機構によって決定されるとする。市場の状態が決定されると、好景気 (G) か不景気 (B) かに依存して分岐点 O_2 あるいは O_3 が到達される。分岐点 O_2 と O_3 は企業 1 の手番を表し、企業 1 は供給量 q_1^H と q_1^L のうちいずれかを選択する。次に市場の状態と企業 1 の意思決定に依存して企業 2 の手番 O_4,O_5,O_6,O_7 のうちの 1 つが到達される。企業 1 と同様にして、企業 2 も供

$$f_i(t_1, \cdots, t_n) > f_i(s_1, \cdots, s_n)$$

となる戦略の組 $(t_1, \cdots, t_n) \in S$ が存在しないことである.

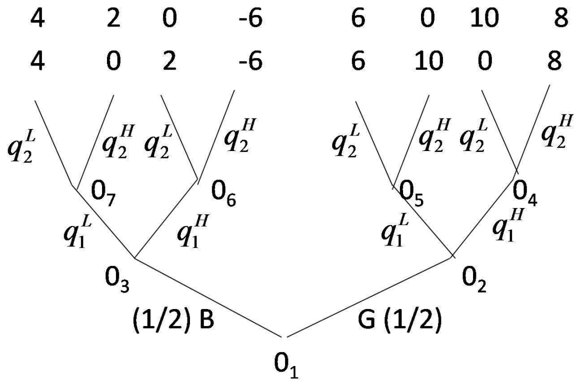

図 2: ゲームの木

給量 q_2^H と q_2^L のうちいずれかを選択する。最後に市場の状態と 2 企業の選択によって木の 1 つの頂点が到達され、ゲームは終了する。各企業は木の頂点に対応するゲームの結果に応じて、利潤を得る。上述のようなゲームの木を用いて記述されるゲームは、**展開形ゲーム**(game in extensive form) と呼ばれ、次の 5 つの要素の組によって定義される。

$$\Gamma = (K, P, p, U, h)$$

K はゲームの木、P はプレイヤーの分割を表し、$P = [P_0, P_1, \cdots, P_n]$ はゲームの木 K の手番の全体 X 上の 1 つの分割である。0 以外の添字 $i = 1, \cdots, n$ はゲームに参加するプレイヤーを表し、集合 $P_i(i = 1, \cdots, n)$ はプレイヤー i の手番の全体を表す。特にここではプレイヤーの分割は次のようになる。

$$P_0 = \{0_1\}, P_1 = \{0_2, 0_3\}, P_2 = \{0_4, 0_5, 0_6, 0_7\}$$

また p は偶然手番の確率分布族を表している。ゲームのすべての偶然手番 $x \in P_0$ に対して、x での選択肢の集合 $A(x)$ 上の 1 つの確率分布 p_x が定められている。確率分布 p_x が各選択肢 $e \in A(x)$ に付与する確率を $p_x(e)$ とするとき、次が成り立つ。

$$\sum_{e \in A(x)} p_x(e) = 1, \, 0 \leq p_x(e) \leq 1$$

偶然手番 $x \in P_0$ の確率分布 p_x の族を p とおく。U は情報分割を表し、情報構造を表している。例えばこの複占市場において、企業 1 のみが市場の状態を知り、両企業は互いの供給量の決定を知らないとき、ゲームの情報分割 $U = [U_0, U_1, U_2]$ は次の図のように表される。このときの情報構造は、次のようである。

$U_0 = [u_0] = [\{0_1\}]$
$U_1 = [u_{11}, u_{12}] = [\{0_2\}, \{0_3\}]$
$U_2 = [u_2] = [\{0_4, 0_5, 0_6, 0_7\}]$

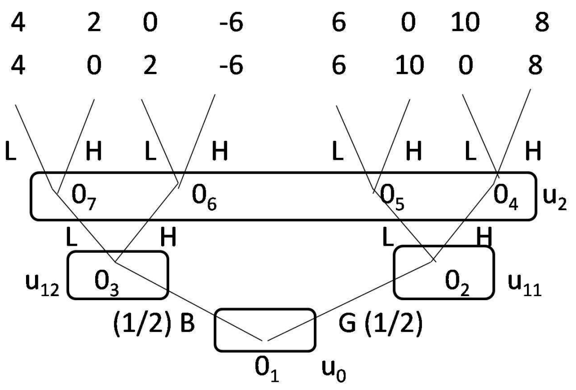

図 3: 情報分割の例

最後に h は利得関数を表しており、ゲームの木 K の各頂点 $w \in W$ に対して利得ベクトル $h(w) = (h_1(w), \cdots, h_n(w))$ を対応させる。ここで第 i 成分はプレイヤー i の利得を表す。

3 不完備情報ゲーム

ここでは不完備情報ゲームと呼ばれる各プレイヤーがゲームのルールについて必ずしも完全な知識を持たないゲームを言う。情報不完備ゲームの定義は次のようになる。

定義．情報不完備ゲームは、次の要素の組で定義される。

$$G^* = (N, \{S_i, C_i, f_i, p_i\}_{i \in N})$$

ここで,
(1) $N = \{1, \cdots, n\}$ はプレイヤーの集合、
(2) S_i はプレイヤー i の行動の集合、
(3) C_i はプレイヤー i のタイプの集合、
(4) f_i は直積集合 $S_1 \times \cdots \times S_n \times C_1 \times \cdots \times C_n$ 上の実数値関数で、プレイヤー i の利得関数を表す。
(5) p_i は各 $c_i \in C_i$ に対して直積集合 $C_1 \times \cdots \times C_{i-1} \times C_{i+1} \times \cdots \times C_n$ 上の同時確率分布

$$p_i(c_1, \cdots, c_{i-1}, c_{i+1}, \cdots, c_n | c_i)$$

を対応させる。

特にここでは企業は生産費用に関して様々なタイプがあり、各企業は自分のタイプは知っているが、ライバル企業のタイプは知らないような状況を考える。

企業 $i (= 1, 2)$ は費用関数

$$C_i(q_i) = c_i q_i, \quad 0 \leq c_i \leq K_i$$

を持ち、限界費用 c_i は区間 $[0, K_i]$ に値をとる確率変数である。企業の限界費用 c_1, c_2 の同時確率分布関数を $F(c_1, c_2)$ とする。企業の供給量の組 (q_1, q_2) に対して、財の価格 p は市場の逆需要関数

$$p = \max\{a - b(q_1 + q_2), 0\},$$

で定まり、企業 i の利潤関数は次のようである。

$$u_i(q_i, q_j; c_i) = pq_i - c_i q_i.$$

企業 i の戦略 π_i は、限界費用のあらゆる値 $c_i \in [0, K_i]$ に対して財の供給量 $\pi_i(c_i)$ を対応させる関数である。戦略の組 $\pi = (\pi_i, \pi_j)$ に対して、企業 i の限界費用が c_i であるときの企業 i の条件付き期待利潤は次のようになる。

$$Eu_i(\pi_i, \pi_j | c_i) = \int_0^{K_j} u_i(\pi_i(c_i), \pi_j(c_j); c_i) dF(c_j | c_i)$$

ただし $F(c_j | c_i)$ は c_i が与えられた場合の確率変数 c_j の条件付き確率分布関数である。以下では、$E(\cdot), E(\cdot | c_i)$ は、それぞれ期待値と条件付き期待値を表す。

このとき企業の戦略の組 (π_1^*, π_2^*) がベイジアン均衡点であるための必要十分条件は、$i, j = 1, 2 (i \neq j)$ に対して、次が成り立つことを言う。

$$\pi_i^*(c_i) = \max\left[\frac{a - c_i}{2b} - \frac{E(\pi_j^* | c_i)}{2}, 0\right] \text{ (a.e.)}$$

証明の概略 期待利潤の 1 階条件から導出することができる.

次に解を計算するために、以下を仮定する。
(A) $0 < K_i < a/2, i = 1, 2$
(B) 各 $i = 1, 2$ について適当な定数 α_i, β_i が存在して、次が成り立つことをいう。

$$E(c_j | c_i) = \alpha_i c_i + \beta_i \ (j \neq i).$$

このような設定の下でベイジアン均衡点を求めると、次のようになる。

$$\pi_i^*(c_i) = \frac{\alpha_i - 2}{b(4 - \alpha_1 \alpha_2)}(c_i - Ec_i) + \frac{a - 2Ec_i + Ec_j}{3b}$$

$(i \neq j)$.

証明の概略 (B) を具体的に代入し、係数比較を行えばよい。

ここでは詳細は省略するが、岡田 [3] では、上の例の比較として、企業は自社及び他社の費用関数を知っていることを仮定してベイジアン均衡点を求めると、不確実性がある場合の方が均衡利潤が少ないことから、企業にとって不利な状況を導くと説明している。

4 繰り返しゲーム理論

第 1 節で、このゲームは囚人のジレンマ型で、各企業が生産量 (戦略) を協調させることによって、Pareto 最適を達成することであった。そこでここでは第 2 節と同様に、時間発展的に企業間で競争を行っている場合を考える。そのため各企業は最後の t 期から $t-1, \cdots$ と時間をさかのぼって各プレイヤーにとって最適な戦略 (Nash 均衡) を導出する。これを一般に**後ろ向き帰納法**(Backward Induction) と呼ばれている。

4.1 有限回繰り返しゲーム理論

有限回繰り返しゲーム理論の場合、最終期の利得が分かるために、第 2 節と同様に最終期から遡っていくことにより、最適な戦略の組 (Nash 均衡) を導出することができる。そのためこの場合各期において、協調行動は見られないために、有限回繰り返しゲームにおいて、協調行動は見られない。[3)]

4.2 無限回繰り返しゲーム理論

次に無限回繰り返しゲーム理論の場合を考える。この場合最終期の利得が分からないため、後ろ向き帰納法が使用できない。

特にここでは簡単化のためにトリガー (trigger) 戦略のみを考える。このトリガー戦略が部分ゲーム完全均衡点[4)]となるのかどうかを調べる。まずトリガー戦略とは次のような戦略のことである。

(1) あるプレイヤー j だけが行動の組 a から離脱すれば、以後、成分ゲーム G の Nash 均衡点 e に従う。
(2) (1) 以外の場合は、a に従う。

先ほどの基本モデルにおいて、簡単化のために、$c_1 = c_2 = c$ と置く。この場合 Nash 均衡時の企業の供給量と利潤は次のようである。

$$q_1^* = q_2^* = \frac{a-c}{3b}, \pi_1^*(q_1^*, q_2^*) = \pi_2^*(q_1^*, q_2^*) = \frac{(a-c)^2}{9b}.$$

また Pareto 最適な供給量の組 $(\bar{q}_1, \bar{q}_2)$ は、

$$\bar{q}_1 + \bar{q}_2 = \frac{a-c}{2b}$$

を満たす。特にここでは $\bar{q}_1 = \bar{q}_2$ の場合を考えので、次のようになる。

$$\bar{q}_1 = \bar{q}_2 = \frac{a-c}{4b}, \bar{\pi}_1(\bar{q}_1, \bar{q}_2) = \bar{\pi}_2(\bar{q}_1, \bar{q}_2) = \frac{(a-c)^2}{9b}.$$

また無限期まで協力した場合の利得は次のようになる。

$$\bar{\pi}_i + \delta\bar{\pi}_i + \delta^2\bar{\pi}_i + \cdots = \bar{\pi}_i\Big(\frac{1}{1-\delta}\Big)$$

t 期まで協調し、それから非協調的な戦略を取った時の利得は次のようになる。

$$\hat{\pi}_i + \delta\pi_i^* + \delta^2\pi_i^* + \cdots = \hat{\pi}_i + \frac{\delta}{1-\delta}\pi_i^*$$

次に $\hat{\pi}_i$、相手が協調行動を採用しているとき, 自分が非協調的な時に得られる利得を求める。つまり次の問題を考えている。

$$\max_{q_1}\Big\{a - c - bq_1 - b\frac{a-c}{4b}\Big\},$$

これから相手が協調行動を採用しているときの供給量, 利潤を次のように得ることができる。

$$\hat{q}_1 = \frac{3(a-c)}{8b}, \hat{\pi}_1 = \frac{9(a-c)^2}{64}.$$

以上から無限期まで協調した方が得となるのは次の関係式を満たすときをいう。

$$\frac{1}{1-\delta}\bar{\pi}_1 \geq \hat{\pi}_1(\hat{q}_1, \bar{q}_2) + \frac{\delta}{1-\delta}\pi_1^*(q_1^*, q_2^*),$$

ただし $\pi_1^*(q_1^*, q_2^*) = \dfrac{(a-c)^2}{9}$, $\bar{\pi}_1(\bar{q}_1, \bar{q}_2) = \dfrac{(a-c)^2}{8}$, $\hat{\pi}_1(\hat{q}_1, \bar{q}_2) = \dfrac{9(a-c)^2}{64}$ である。これから協調状態は企業の将来利潤に対する割引因子 δ が $\dfrac{9}{17}$ 以上のとき、Nash 均衡戦略を処罰ルールとしてもつトリガー戦略に

3) ただし部分ゲーム完全 ε-均衡点という概念を導入すると、協調行動が見られることが知られている。(Friedman [1])

4) **定義 6.5** 繰り返しゲーム $G^\infty(\delta)$ における戦略の組 $s^* = (s_1^*, \cdots, s_n^*)$ が $G^\infty(\delta)$ の**部分ゲーム完全均衡点**(Subgame Perfect Nash Equilibrium) であるとは、任意の $t = 0, 1, 2, \cdots$ と t 回目までの任意の履歴 h^t に対して、s^* と h^t から導かれる戦略の組 $s^*_{|h^t} = (s^*_{1|h}, \cdots, s^*_{n|h^t})$ が部分ゲーム $G^\infty(\delta)(h^t)$ の Nash 均衡点であることをいう。

よって実現される。

5　取り上げていない事項

これら以外にも様々な拡張をすることができる。例えば、モニタリングや評判の研究などがある。

参考文献

[1] Fiedman, J.W. (1985): ”Cooperative equilibria in finite horizon noncooperative supergames,” *Journal of Economic Theory*, Vol.**35**, pp.390-398.

[2] Gibbons, Robert (1992): *Game theory for applied economists*, Princeton Univeristy Press. (邦訳あり)

[3] 岡田章 (1996): 『ゲーム理論』, 有斐閣.