

統計力学を用いた進化ゲーム理論 Evolutionary Game Theory with Statistical Mechanics

Graduate School of Economics, Kwansai
Gakuin University D3

吉川 満

mitsurukikkawa@hotmail.co.jp

経済物理学III (京都大学基礎物理学研究
所): 2007/12/25: 9:20-9:40

関西学院大学大学院経済学研究科研究会WEBの「学会報
告のレジュメ等」からDownloadable

VER. 12/23

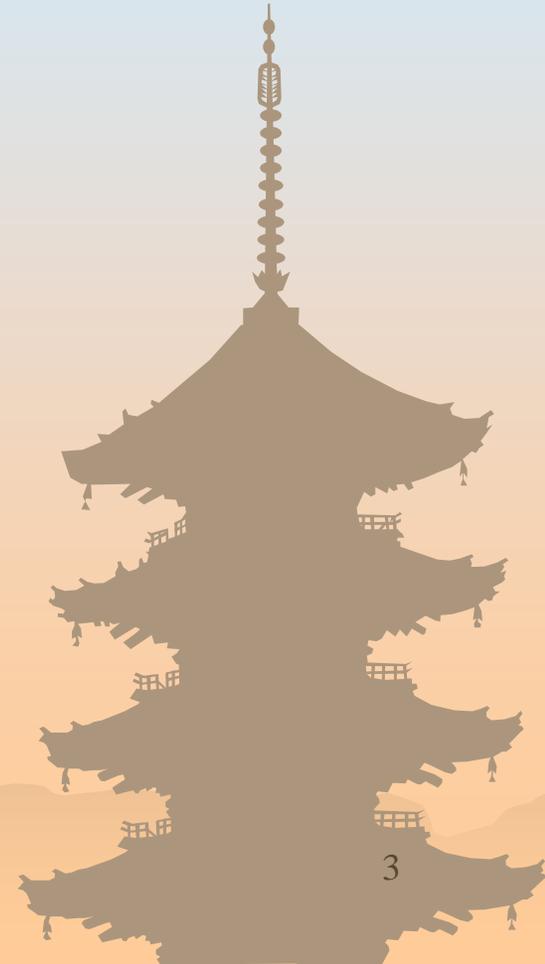
<http://members.ld.infoseek.co.jp/kgu-gse/gakkai/gakkai.htm>

CONTENTS

1. Introduction (Motivation, Purpose)
2. Precedent Papers and Review
3. Our Model
 - 3-1. Nearest neighbor (Ising TYPE)
 - 3-2. Random Matching (SK MODEL)
 Annealed System, Quenched System
4. Extension : Dynamics
5. Application : Cont- Bouchaud's Model
6. Conclude and Future Work



1. INTRODUCTION



OUR CONTRIBUTION

- ❁ 進化ゲーム理論を統計力学によって、定式化を行った。→変数が1つ増えた。
- ❁ 「Phase Transition(相転移)」を利用した、均衡の生成

In detail, 統計力学で最も簡単なIsingモデル、SKモデルを用いて、ゲームの定式化した。さらには動学化し、多重均衡の存在を示した。

→変数によって既存の進化ゲーム理論と一致し、しない場合が存在。

MOVITATION

❁ 様々な主体がいるモデル＝高次元系を分析したい。

→しかし、数千、数万の方程式を取り扱うことは無理。
安定性に限っては、Routh-Hurwitzの定理から4本以上となると分からないに等しい。

分布関数を用いて、高次元系を分析する

→Statistical mechanics

今までどのようにして様々な主体がいるゲームを分析してきたのか？

→平均のみを考え、低次元系へ。

Replicator方程式は、平均場との相互作用：その大小で、戦略の増減が決まる。

→こんなに単純でよいのか？仮に戦略が2つの場合であっても、複雑な状況があるのではないか？

MY THOUGHT about ECONOPHYSICS

- ❁ 感想: 主流派の経済学と、経済物理の研究は一見かけ離れている(→後述)。
- ❁ そこで私の研究は物理学の発想・手法を借りて、主流派の経済学、ゲーム理論を分析。

例) 1. 近可積分系(KAMの定理やArnold Diffusion)を最終提案ゲーム、共有資源のゲーム)に適用。2. 統計力学(This talk)を高次元の進化ゲーム理論に適用。

- ❁ Background of this talk:

① 熱力学の平衡状態 と 一般均衡理論のWALRAS 均衡の概念のアナロジー

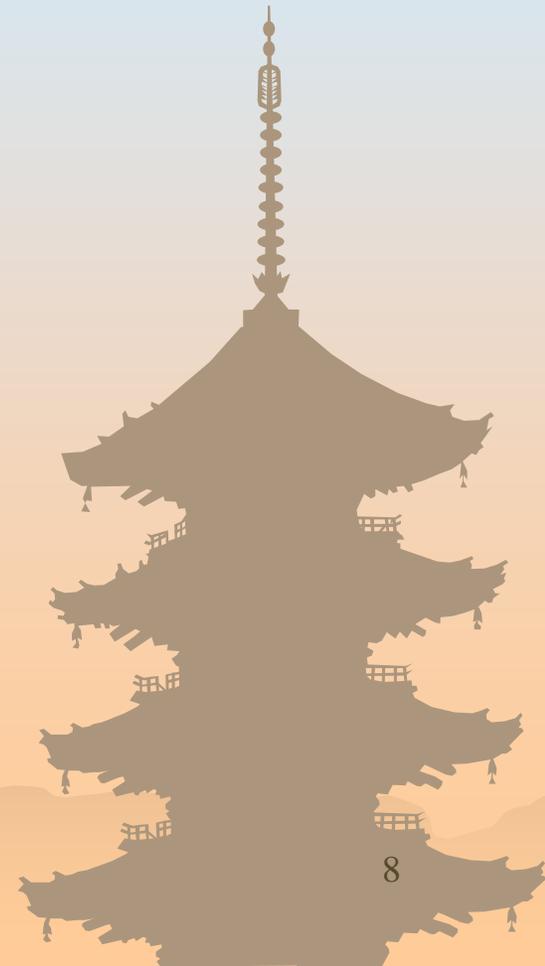
② 統計力学における相転移と均衡の生成のアナロジー

しかし全く同じではなく、より経済学に適した仮定に。

久保亮五「統計力学」共立出版

- ❁ 統計力学の1つのたとえ話として、 N 人いる各個人が経済活動をしており、その結果お金を得られるような経済において、各個人の所有する通貨量 x （社会全体で M 円）の分布を考えた。
- ❁ $N \rightarrow \infty$ のとき、公平な分配が確率1で実現。
- ❁ 欠点：
等重率の取り方が経済学的に「不適切」
(例：公平な分配を不平等極まりない分配が等確率で実現)

2. Precedent Papers and Review



PRECEDENT PAPERS

- ❁ **Diederich and Opper(PRA,1989)、Tokita and Yasutomi (PRE,1999): 進化ゲーム理論に統計力学を導入した。**
 - Spin Glass で使われているSKモデルを直接応用し、定式化を行った。
 - そのため、物理学の仮定が課されており、不適ではないか？また既存の理論との対比が欠如し、分かりづらい。特にTokita and Yasutomi (1999)ではEuler法を使って、連続時間体系から離散時間体系へと変形している。確率変数もlogの形へ変形。多くの人が認める方法を用いていない。ただしシミュレーション結果は興味深いものとなっている。

RANDOM INTERACTION (SK MODEL)

Diederich and Opper(1989)

✿ Replicator Eq.:

$$\frac{dx_\nu}{dt} = x_\nu (f_\nu - \bar{f}), \quad \text{for } \nu = 1, \dots, N.$$

✿ Fitness Function: $f = -H = \frac{1}{2} \sum_{\nu\mu} x_\nu c_{\nu\mu} x_\mu,$

where, $f_\nu = \frac{\partial f}{\partial x_\nu},$ $c_{\nu\mu} = c_{\mu\nu} (\mu \neq \nu)$ This is a element of

the Random Matrix , it is Gauss Distribution, Average is 0,
Variance is $1/N.$

以上の設定の下で、2つの戦略の分布を調べた。

We obtain the following Equations with Replica method under Quenched System.

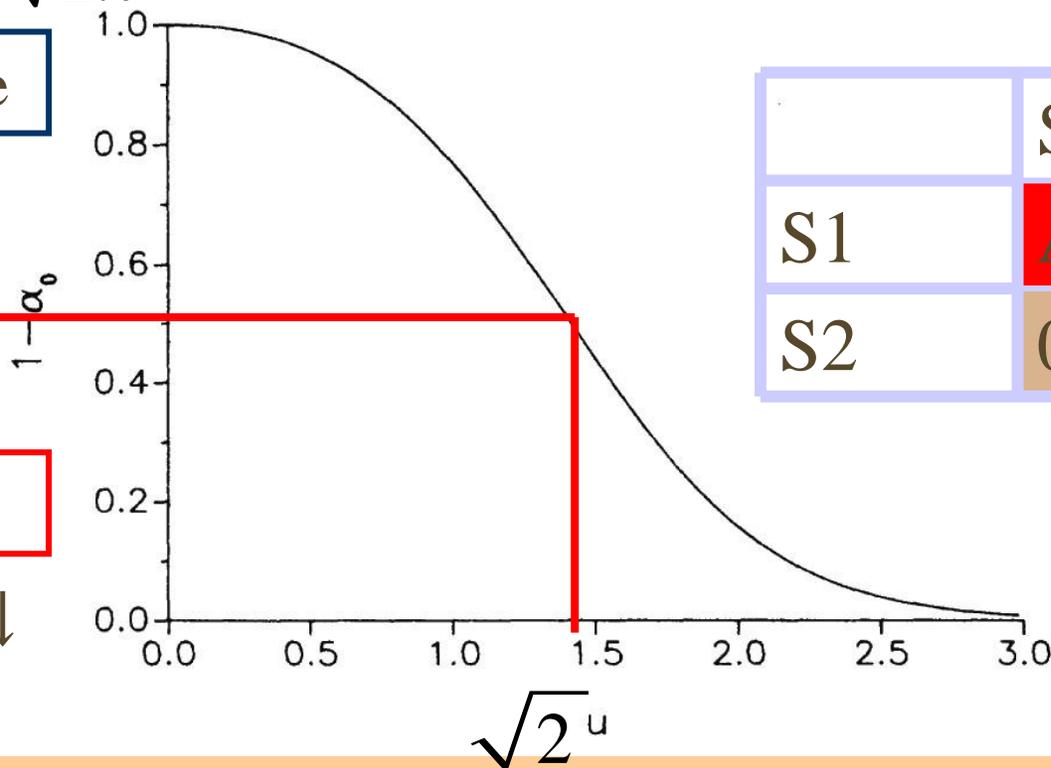
$$u - v = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Delta}^{\infty} dz e^{-z^2/2} (z + \Delta),$$

$$(u - v)^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Delta}^{\infty} dz e^{-z^2/2} (z + \Delta)^2, \text{ where } \Delta = \sqrt{q}(u - 2v)$$

Competitive

↑ ↓, ↓ ↑

0.5



	S1	S2
S1	A,A	0,0
S2	0,0	B,B

Cooperative

↑ ↑, ↓ ↓

Parameter u

REVIEW: Symmetric and Asymmetric Games

- 対称2人ゲームと非対称2人ゲームの違い
→ 利得表が異なる(戦略が2つの場合)

タイプ2

		S1	S2
タイプ1	S1	A, A	C, B
	S2	B, C	D, D

Symmetric Two Person Game

Replicator Equation: 1本

分析対象:

Symmetric: 同一タイプによる
ゲーム

タイプ2

		S1	S2
タイプ1	S1	A, E	C, G
	S2	B, F	D, H

Asymmetric Two Person Game

2本

Asymmetric: 売り手と買い手など。

REVIEW: Replicator Equation

REPLICATOR EQ. $\dot{x}_i = x_i \left((Ax)_i - x \cdot Ax \right), i = 1, \dots, n.$

ある戦略 i を取ったときの自分の利得が平均利得よりも大きい場合には、その戦略を取る確率が高くなり、またゲームをしている周りの主体がその戦略を取る確率が高いほどその増加率も高くなる(外部性の存在)、ということを示している。

また利得が高ければ、その戦略をとる人が多いという仮定(利得の単調性)を仮定すれば、一意で導出される。

特に戦略が2つのとき

$$\dot{x} = x(1-x)\{b - (a+b)x\}$$

主な分類:

- (I) 非ジレンマ型: $a > 0, b < 0$, ESS :1つ
- (II) 囚人のジレンマ: $a > 0, b < 0$, ESS :1つ
- (III) コーディネーション型: $a > 0, b > 0$, ESS 2つ
- (IV) タカ=ハト型: $a < 0, b < 0$, ESS 1つ(混合戦略)

	戦略1	戦略2
戦略1	a,a	0,0
戦略2	0,0	b,b

利得表

REVIEW: Ising Model, Spin Glass

- ❁ Ising model … 相転移(異なる相へ移る)を記述する最も簡単なモデル。
- ❁ 金属に外場から磁化をかけ、ある臨界値(Curie温度)を超えると、磁石となる。
- ❁ 格子上にある(スピンの)状態 $S_j : \{-1, +1\}, j=1, \dots, N$
- ❁ N個状態が「+1 or -1」にすべて揃ったら「cooperative」、「-1, 1」の組ならば「competitive」、
- ❁ Hamiltonian (Energy)

$$H = -J \sum_{i,j} S_i S_j$$

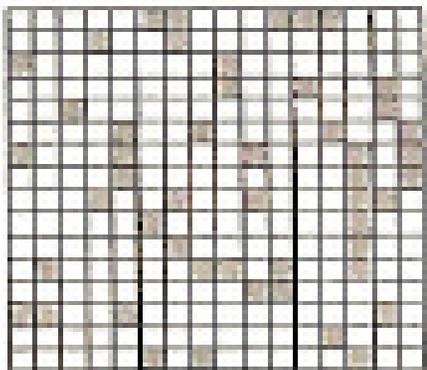
- ❁ Spin Glass … 相互作用の符合が^{i,j}場所に一定ではないというミクロ的な特徴を持っている。

例) CuMn … 銅(強磁性体にならない)に微量のマンガン(磁性原子)を混ぜ合わせて合金を作ると、マンガンの原子は銅の結晶格子中でランダムな位置を占め、ガラスの性質に似たスピン秩序を示すので、Spin Glass と呼ばれる。

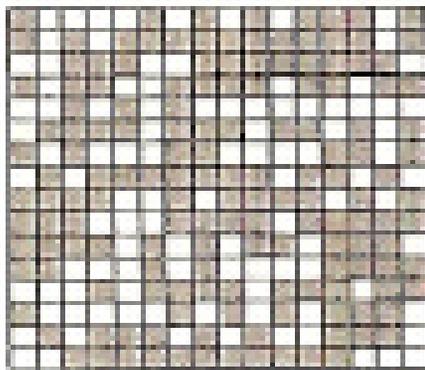
REVIEW: PERCOLATION

[d次元 Percolation]

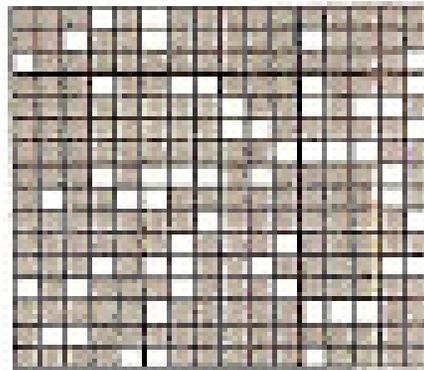
d次元立方格子 Z^d ($d \geq 2$) において, 各bondはそれぞれ独立に p で開き, 確率 $1-p$ で閉じている. いま, 原点に水を注ぐとき, 開いたbondのみを通過して水は流れるものとする. このとき, どのような p の値に対して原点から無限にのびる水路が出現するか.



$p=0.2$



$p=0.59$



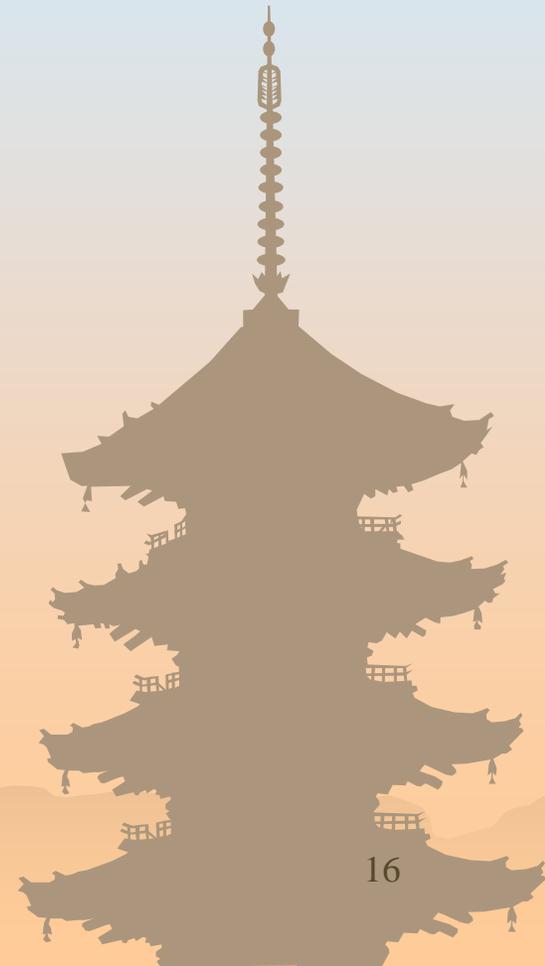
$p=0.8$

無限格子における閾値 p_c の定義

$p < p_c$ 端から端まで連結したクラスターが存在せず、すべてのクラスターの大きさは有限である。

$p \geq p_c$ 1個の端から端まで連結したクラスターが存在する。

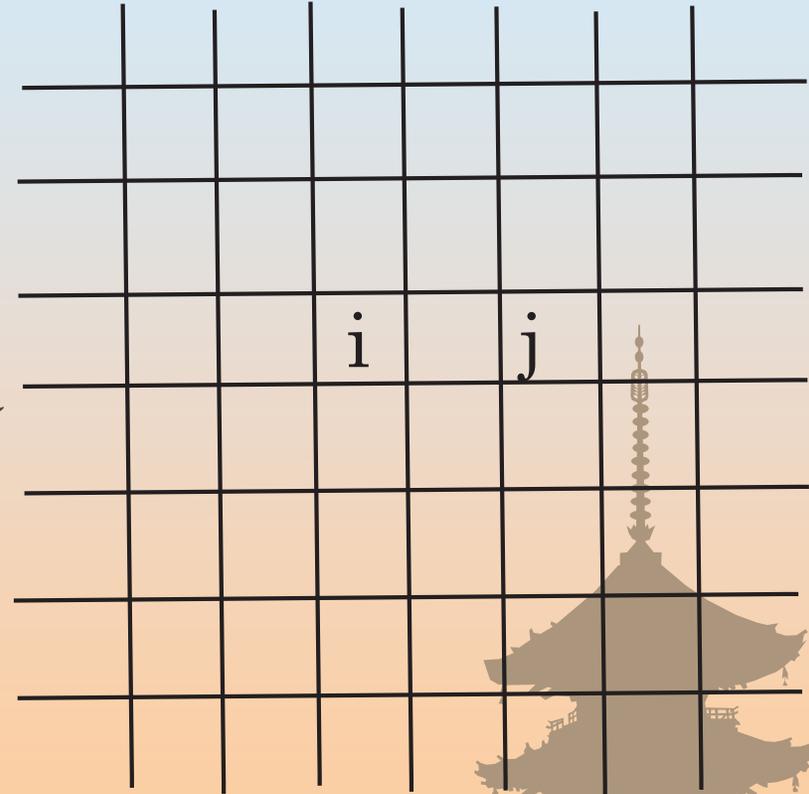
3. BASIC MODEL



MODEL:

Game: 2 types Strategy, 2 types Agent

- ❁ 多数の人がおり、2タイプの主体が1対1で出会い、2つの戦略を用いて、ゲームをする。
- ❁ In Sec.2, player i and j play a Game with Nearest Neighbor Interaction.
- ❁ In Sec.3, player i and j play a Game with Random Matching



LATTICE

EXAMPLE

	S1(1)	S2(2)
S1(1)	A,A	0,0
S2(2)	0,0	B,B

	S1(-1)	S2(+1)
S1(-1)	A,A	0,0
S2(+1)	0,0	B,B

where $A, B > 0$

Ising Model (Very Simple)

ASSUMPTION , PROPOSITON

ASSU.: 各主体は高い利得・適応度を得ることを望んでいる。

PROP.: 仮定のもとで主体 x のある戦略 $\{S_i\}, i=1, \dots, N$ を取り、ある利得 f を得るというゲームの状況下に戦略の分布は

$$P(\{S_i\}) = Z^{-1} \exp(\gamma f)$$

となる。ただし $\{S_i\}$ は主体 i の戦略、 γ は変数（例えば、正の情報）、 f はある戦略 $\{S_i\}$ を取ったときの利得・適応度、 Z は規格化定数を表している。

❁ **INTERPRETATION:** : 利得が高ければ、その戦略をとる確率が高い。

❁ **DISTINCTIVE:** STATICS, Non-Externality

TRADITIONAL EVOLUTIONARY GAME

- ❁ ASSU.: 各主体は高い利得・適応度を得ることを望んでいる。
- ❁ Under this assumption, we obtain the unique solution: Selection Dy. → Replicator Eq. Replicator Eq.

$$\dot{x}_i = x_i (f_i - \bar{f}), i = 1 \cdots, N.$$

INTERPRETATION: ある*i*番目の戦略は平均利得・適応度よりも高ければ、その戦略を確率1で選択する。

DISTINCTIVE: DYNAMICS, EXTERNALITY

DEFINITION

DEF.: 戦略が一定の秩序を持っているかどうかを判断する量を秩序パラメータ(order parameter) という概念を次のように導入する。

(2.2)

$$m = \langle S_i \rangle = \frac{1}{N} \sum_i S_i \equiv \sum_i S_i P(\{S_i\})$$

where $\langle \ \rangle$ stands for the average.

EXAMPLE

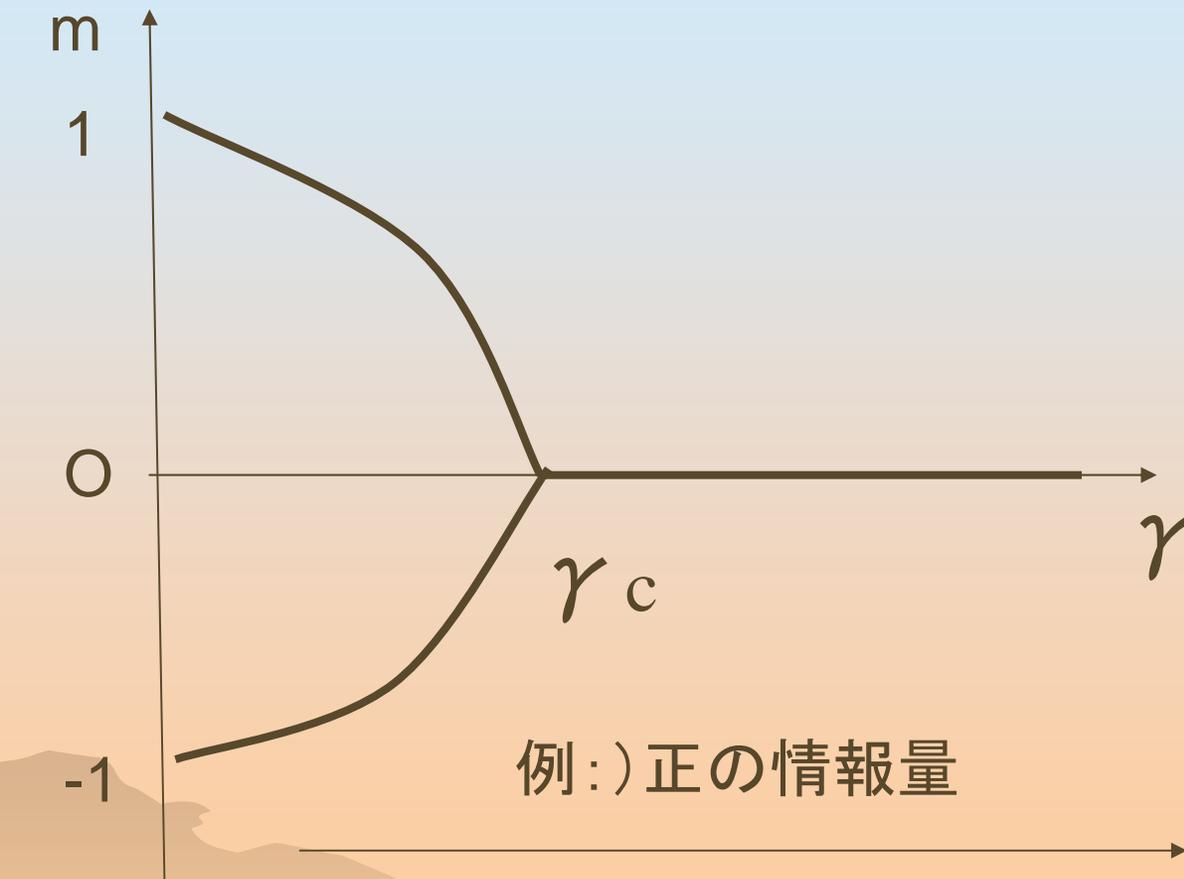
- 先ほどのEXAMPLEで考える。このとき、
戦略1を確率1でとる場合、 $m=1/2$ 、
戦略2を確率1でとる場合、 $m=1$ 、
戦略1と2をランダムにとる場合、 $m=3/4$ 。

→ m の値は、 $1/2 \leq m \leq 1$ の間で、 $m=1/2$ に近ければ、戦略1を取る人が多いと分かり、 $m=1$ に近ければ、戦略2を取る人が多い。

	S1(1)	S2(2)
S1(1)	A,A	0,0
S2(2)	0,0	B,B ₂

❁ EXAMPLE : Ising model

❁ $S_i = \{-1, 1\} \rightarrow m = -1, 0(\text{random}), 1$



例 :) 正の情報量

多い

戦略はどちらか一方

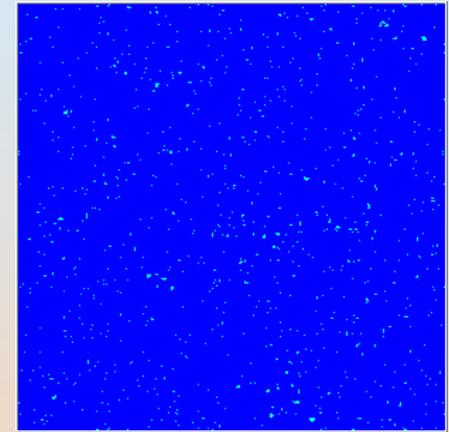
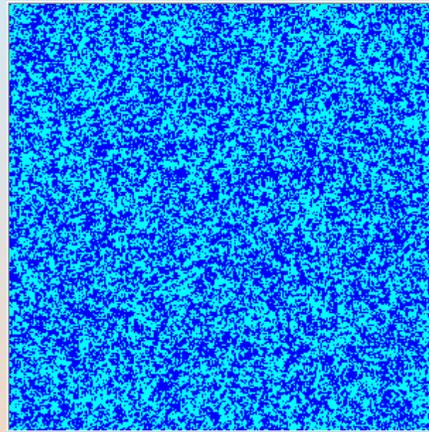
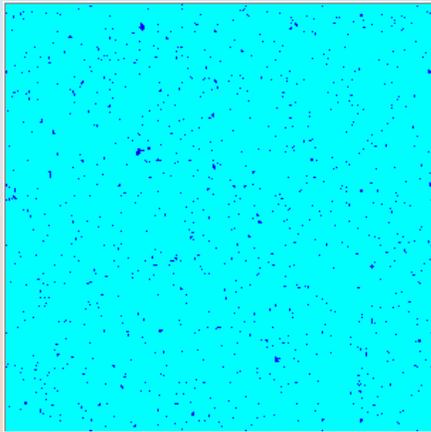
少ない

戦略はランダム

SIMULATION

先ほどの分岐図は、格子図で見ると、次のような図である。

SKY BLUE = Strategy 1、BLUE = Strategy 2



ORDERED TYPE 1

$$m^* > 0$$

(s1, s1)

NO ORDERED

$$m^* = 0$$

s1とs2

がRandomに選択

ORDERED TYPE 2

$$m^* < 0$$

(s2, s2)

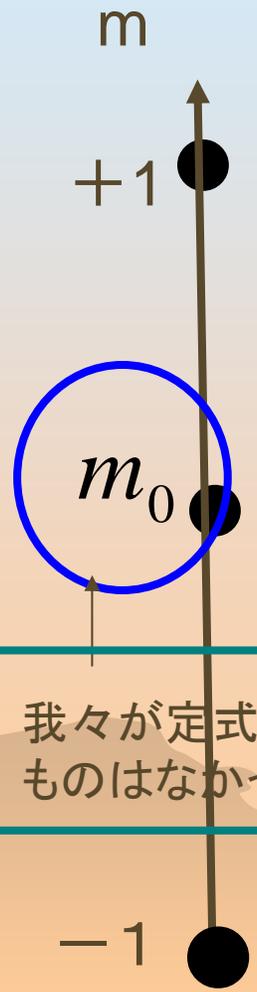
ORDERED PARAMETER IN REPLICATOR SYSTEM

最も単純な戦略が2つの対称2人ゲームにおいて、REPLICATOR 方程式は

$$\dot{x} = \{(a+b)x - b\} x(1-x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

このときの平衡点 (Nash均衡) は、

$$x^* = 0, 1, 0 < \frac{b}{a+b} < 1$$



我々が定式化したものはなかった。

ORDERED PARAMETER has **three points** (corner point(-1,+1), interior point) in RE. SYS.



EVOLUTIONARILY STABLE STRATEGY (ESS)

DEF.: Weibull(1995): $x \in \Delta$ is an *evolutionarily stable strategy (ESS)* if for every strategy $y \neq x$ there exists some $\bar{\varepsilon}_y \in (0, 1)$ such that the following inequality holds for all $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}_y)$

$$u[x, \varepsilon y + (1 - \varepsilon)x] > u[y, \varepsilon y + (1 - \varepsilon)x].$$

INTERPRETATION: どのような突然変異戦略を採用したとしても、既存戦略の方が効用が高い。

(ESS : ①the solution of the Replicator equation + ② asymptotic stable.)

PROPOSITION

PRO.(Bishop and Cannings (1978)): $x \in \Delta$ is evolutionary stable strategy if and only if it meets these first-order and second-order best-reply :

$$(2.4) \quad u(y, x) \leq u(x, x), \quad \forall y, \quad \leftarrow \text{Nash Eq.}$$

$$(2.5) \quad \begin{aligned} &u(y, x) = u(x, x) \\ &\Rightarrow u(y, y) < u(x, y), \end{aligned} \quad \forall y \neq x,$$

Asymptotic Stable
Conditon

PROPOSITION

PRO.: 統計力学を用いた進化ゲーム理論において、
進化的に安定な戦略とは次の条件を満たすことと
同値である。

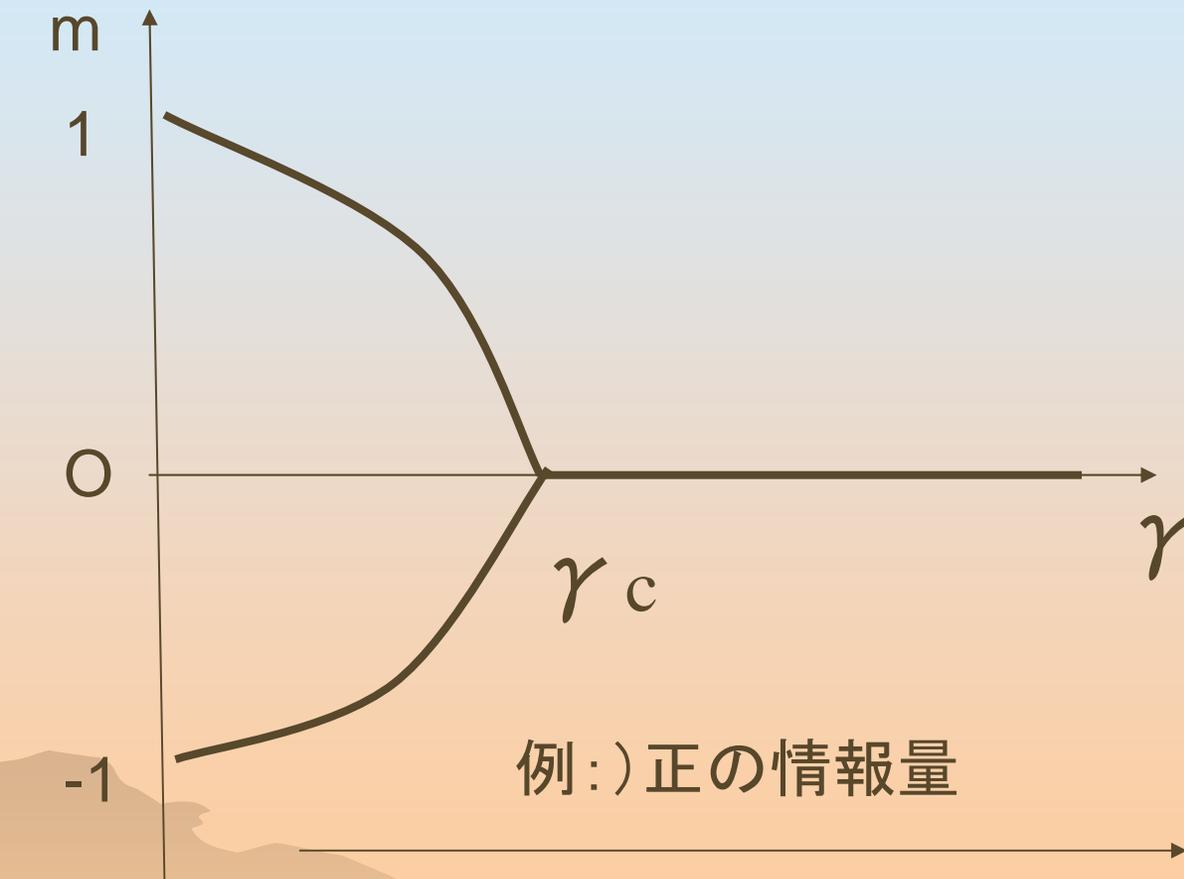
$$(2.4) \quad u(y, x) \leq u(x, x), \quad \forall y,$$

$$(2.6) \quad |m - m^*| < \varepsilon, \quad \text{Lyapunov Stable Condition}$$

where, m^* stands for the index of the
strategy

❁ EXAMPLE: Ising model

❁ $S_i = \{-1, 1\} \rightarrow m = -1, 0(\text{random}), 1$



多い
戦略はどちらか一方

少ない
戦略はランダム

ASYMMETRIC TWO PERSON GAME

- ✿ 秩序パラメータをもう1つ定義し、ESSについては、先ほどのPRO. の(2.6)の条件を次のように修正すれば、足りる。

$$\left| m'_1 - m^*_1 \right| < \varepsilon_1 \quad , \quad \left| m'_2 - m^*_2 \right| < \varepsilon_2$$

PERCOLATION

❁ 2次元Isingモデルにおいて、相転移とPercolationとの関係

THE. (Coniglio, et al.(1976)) 2次元Isingモデルにおいて、 $\mu^s, s = \{+, -\}$ を平衡における(s)不変確率測度として、次の関係が成り立つ。

(i) $\gamma > \gamma_c$ のとき

$$\mu^+_{\gamma,0} \left(|C_0^+| = \infty \right) > 0, \quad \mu^-_{\gamma,0} \left(|C_0^-| = \infty \right) > 0$$

(ii) Gibbs 分布の全体 $G(\gamma, h)$ の任意の端点 μ に対して

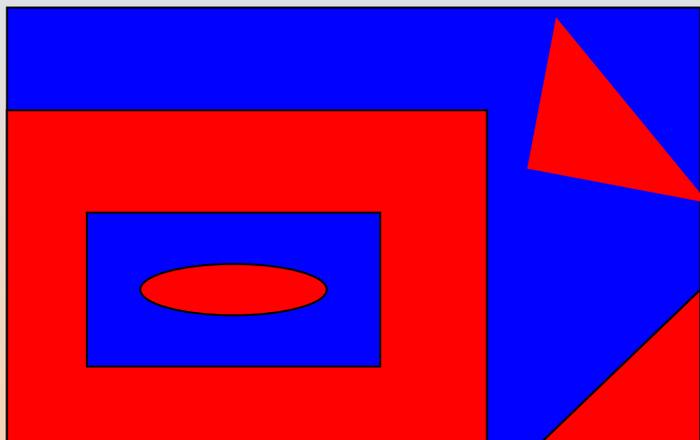
$$\mu \left(|C_0^+| = \infty \right) \mu \left(|C_0^-| = \infty \right) = 0$$

(i) → あるパラメータ領域において、戦略1と戦略2のClusterが存在する。

(ii) → あるパラメータ領域において、どちらかの戦略はClusterが存在しないか、両方とも存在しない。

同心円的なパターン、チェス盤パターン

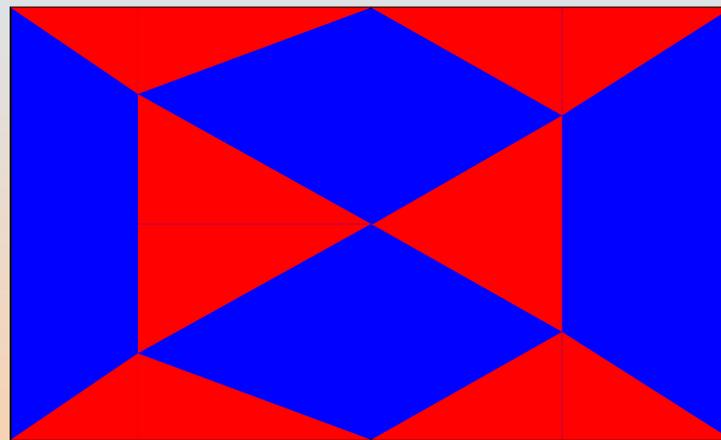
- ❁ Percolationが起こっていないとき、どのような戦略の配置が典型的なパターンか？



同心円パターン

→赤を青が取り囲み、またそれを赤が取り囲み、・・・というパターン

有限な * 連結成分の存在



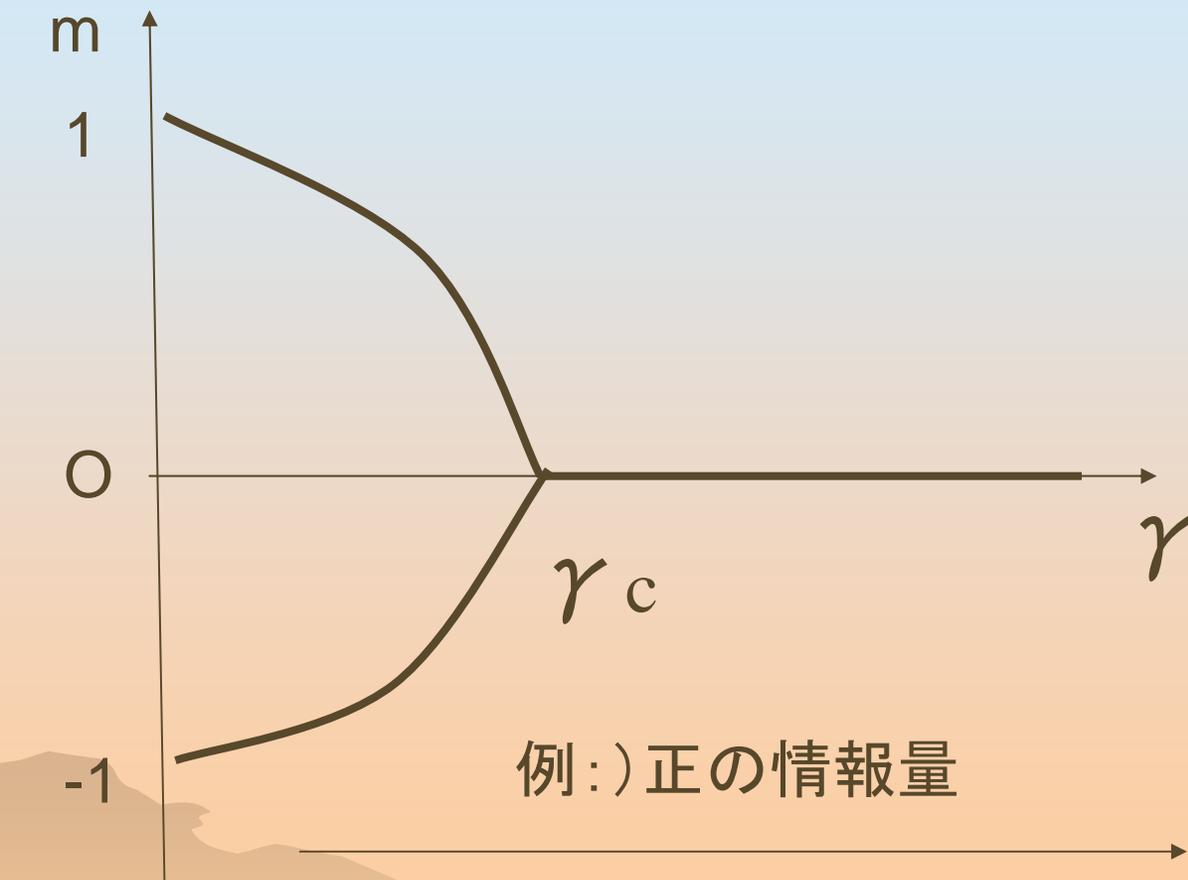
チェス盤パターン

→赤のかたまりと青のかたまりが互い違いに、配列するパターン

無限サイズ * 連結成分の存在

❁ EXAMPLE: Ising model

❁ $S_i = \{-1, 1\} \rightarrow m = -1, 0(\text{random}), 1$



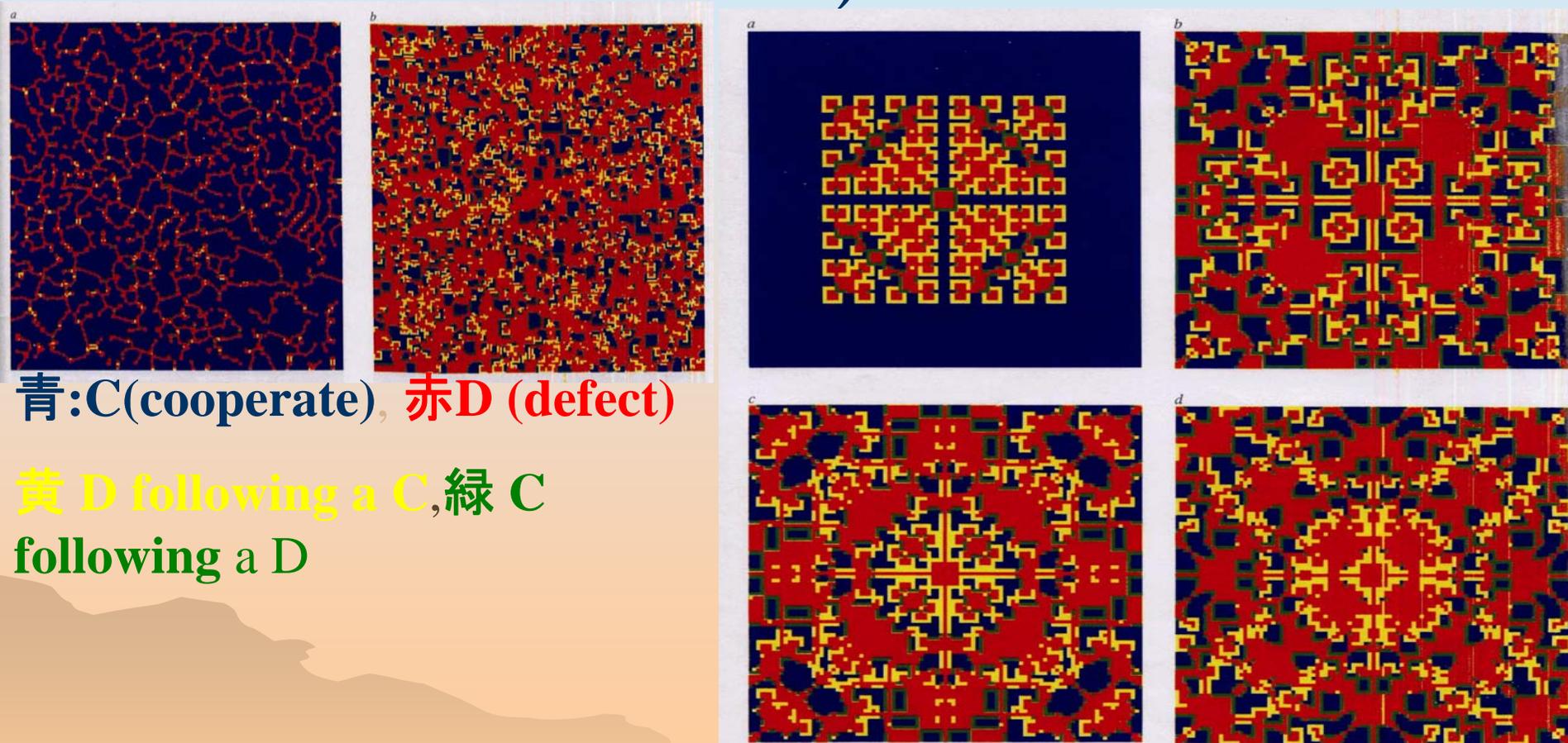
多い
戦略はどちらか一方

少ない
戦略はランダム

無限 * クラスターの存在

TH. (樋口 (1995)) $\gamma > 0$ が十分小で, h が
 $\gamma' h' < \frac{1}{2} \log \frac{p_c}{1-p_c} - 4\gamma'$, $\gamma h < \frac{1}{2} \log \frac{1-p_c}{p_c} - 4\gamma$ を同時に成
立させるとき、 $\mu_{\gamma, h}$ に関して確率 1 で無限 * クラス
ターの共存が起こる。

SPATIAL PRISONER'S DILEMMA GAME EX.: Nowak and May (Nature, 1992)



青:C(cooperate), 赤D (defect)

黄 D following a C, 緑 C following a D

PERCOLATION は存在しないが、* 無限クラスターは存在する。

SK MODEL

- Random Matching
- Payoff, Fitness

$$H(\{J_{ij}\}) = \sum_{i \neq j} J_{ij} S_i S_j$$

where $P(J_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi J^2}} \exp\left\{-\frac{(J_{ij} - J_0)^2}{2J^2}\right\}$

J_0 : Average , J^2 : Variance

Annealed System → 主体はある程度自由にゲームをする相手を選ぶことができる。

❁ Free energy, 分布関数の配位平均.

$$F = \gamma \log \langle Z \rangle, \quad \text{Probability of Matching}$$

$$\langle Z \rangle = \sum_{\{S_i\}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{(ij)} dJ_{ij} P\{J_{ij}\} \exp(\gamma H\{J_{ij}\}),$$

$$= \sum_{\{S_i\}} \exp \left[\sum_{(ij)} \left\{ \gamma J_0 S_i S_j + \frac{(\gamma J)^2}{2} (S_i S_j)^2 \right\} \right]$$

Fitness

Max
m

Solved

$$F = \gamma \left[\sum_{[S_i]} \left\{ \gamma J_0 \left(\sum_i S_i \right)^2 + \frac{1}{2} (\gamma J)^2 \left(\sum_i S_i \right)^4 - \gamma J_0 N \sum_i S_i^2 - \frac{1}{2} (\gamma J)^2 N \sum_i S_i^4 \right\} \right]$$

❁ $m = \langle Si \rangle$ と置き、 m について微分すると、

$$\frac{\partial F}{\partial m} = 2\gamma^2 J_0 N^2 m + 2\gamma^3 J^2 N^4 m^3 = 0$$

$$m = 0 \quad \text{or} \quad \pm \sqrt{\frac{-J_0}{\gamma J^2 N^2}}$$

As $N \rightarrow \infty$, $m = 0$.

Ising Typeでは \tanh の関数であったが、秩序変数はReplicator系と同様に点、ランダム、+と-の値であることが分かった。さらに無限人のゲームでは秩序・均衡は存在しないことが分かった。

QUENCHIED SYSTEM

- ❁ 当初(Nature)から相互作用の仕方、強さが決まっている。

Free Energy $F = \gamma \langle \log Z \rangle$

Replica Method $\langle \log Z \rangle = \lim_{n \rightarrow 0} \left(\langle Z^n \rangle - 1 \right)$

Hubbard-Stranovich Trans. $\exp \left[\frac{a^2}{2} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ax - \frac{x^2}{2} \right] dx$

+ saddle point method + replica symmetry

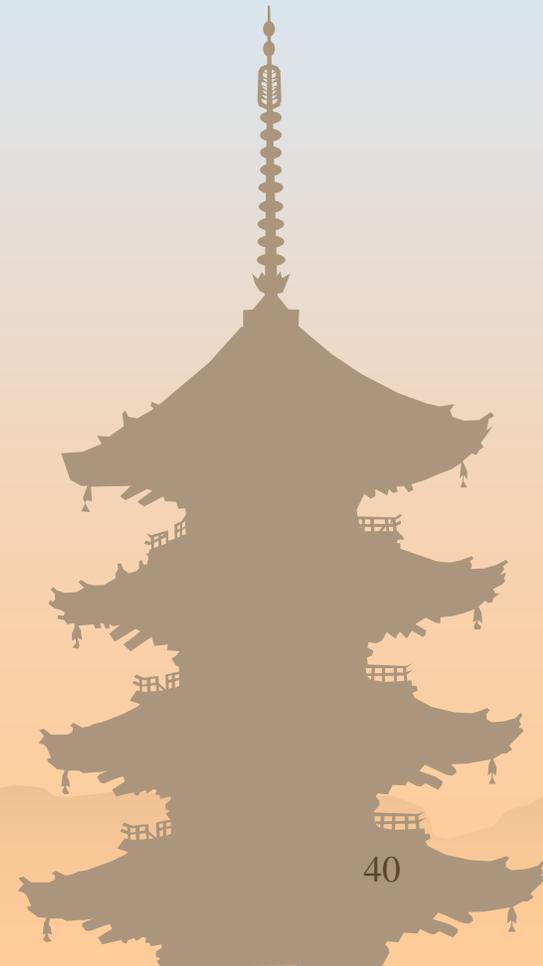
Solved $m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{1}{2} z^2 \right) \tanh \left(\gamma \tilde{J} \sqrt{q} z + \gamma \tilde{J}_0 n \right) dz$

$$q = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{1}{2} z^2 \right) \tanh^2 \left(\gamma \tilde{J} \sqrt{q} z + \gamma \tilde{J}_0 n \right) dz$$

→ Ising Type と同様に。

4. EXTENSION

DYNAMICS



DYNAMICS

• Master Equation

$$\frac{d}{dt} P(S_1, \dots, S_N; t) = - \sum_j W_j(S_j) P(S_1, \dots, S_N; t) + \sum_j W_j(-S_j) P(S_1, \dots, -S_j, \dots, S_N; t)$$

• Local Detail Balance Condition (Sufficient Condition)

$$\frac{W_i(S_i)}{W_i(-S_i)} = \frac{\exp(-\gamma E_i S_i)}{\exp(\gamma E_i S_i)}, \quad \text{where} \quad E_i = \sum_j J_{ij} S_j$$

• Dynamics of the Ordered parameter

$$\tau \frac{d}{dt} \langle m \rangle_t = \langle \tanh \gamma E_i \rangle_t - m_t$$

• Dynamics of the Correlated function

$$\tau \frac{d}{dt} \langle S_i S_j \rangle_t = -2 \langle S_i S_j \rangle_t + \langle S_i \tanh \gamma E_j \rangle_t \langle S_j \tanh \gamma E_i \rangle_t$$

TAP EQUATION

- ❁ h_jの導入→周りを見る度合い(EXTERNALITY)

$$H(\{J_{ij}\}) = \sum_{i \neq j} J_{ij} S_i S_j + \sum_{i \neq j} h_j S_j$$

Annealed System

→Solved $h_j = 2\gamma m(1-N)(J_0 + J^2 m^2)$

秩序変数が自明なもの以外、不連続となるような点は存在しない。

Quenched System

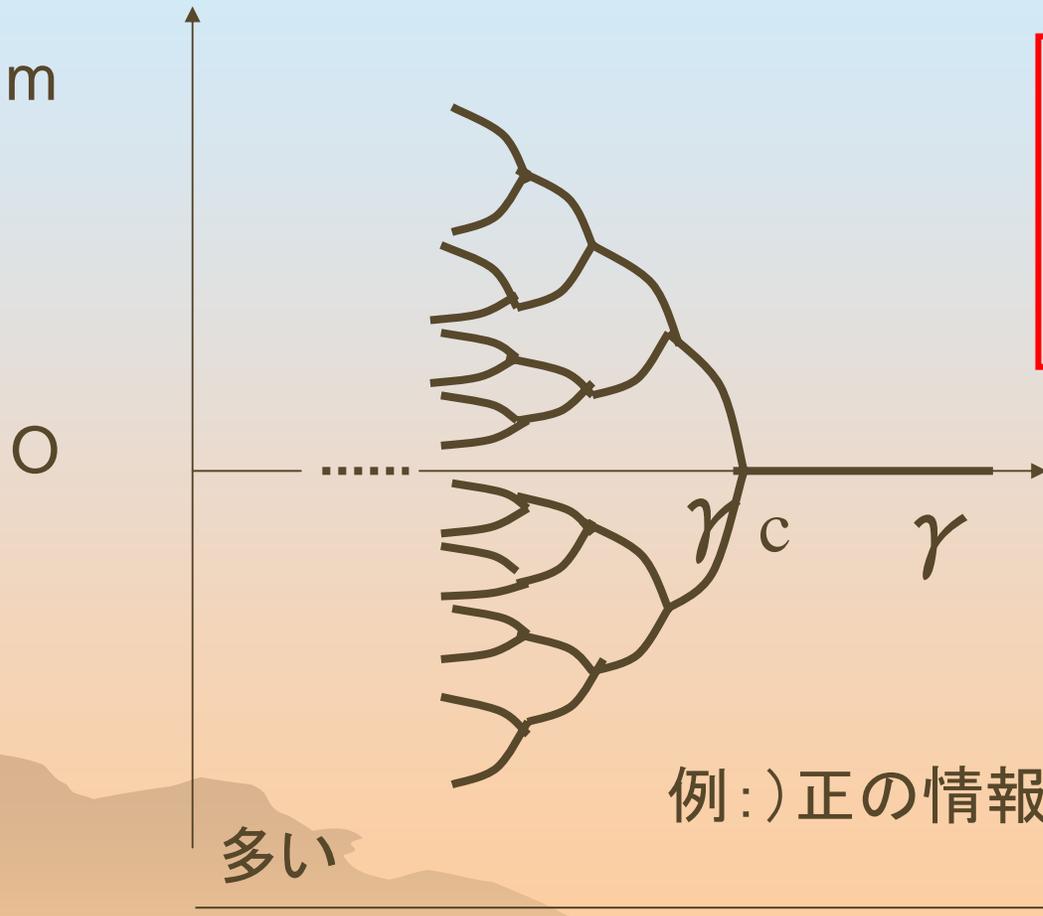
$$m_\lambda = \frac{1}{T - J_\lambda} h_\lambda$$

→最大固有値2Jのとき、秩序変数が不連続となる。

→Multiple Equilibria

MULTIPLE EQUILIBRIA

Externality、Random Matching、Quenched System

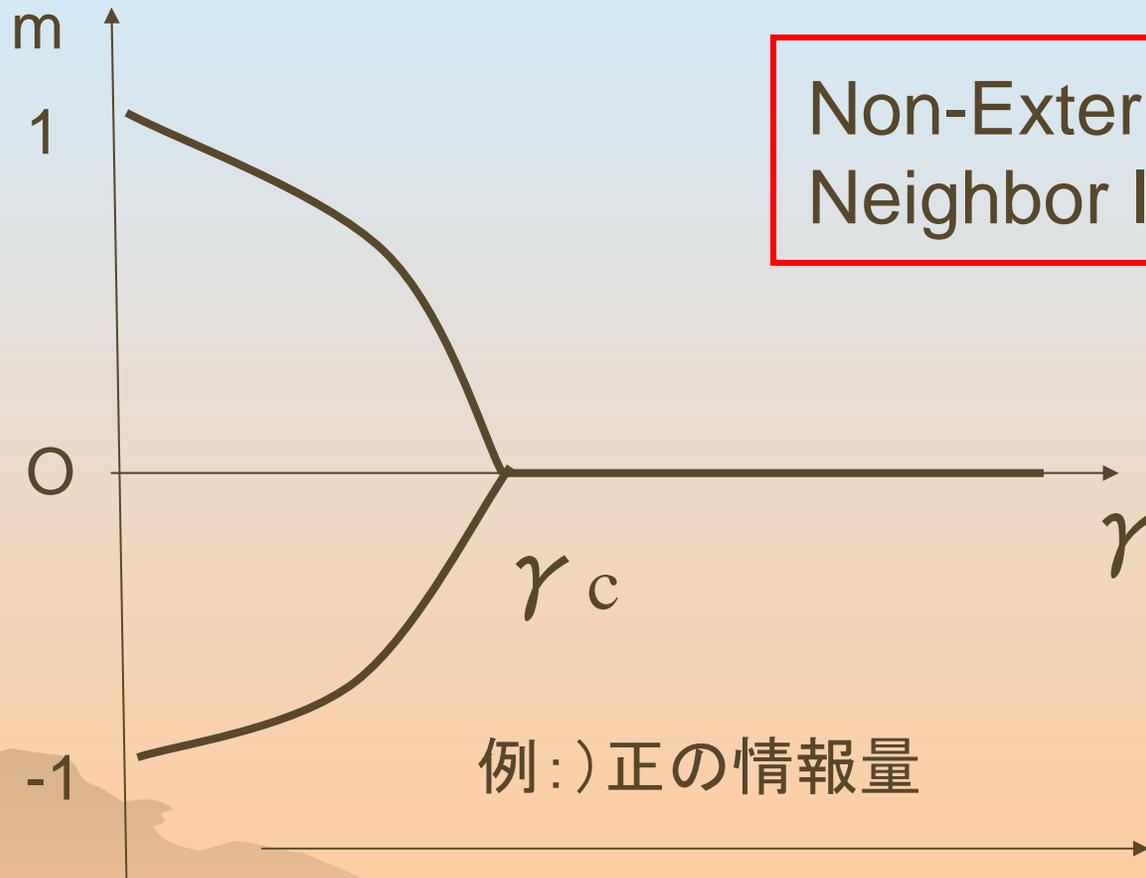


様々な均衡の存在=いろいろな状況が均衡となりうる。

戦略に一致はなく、Random

❁ EXAMPLE : Ising model

❁ $S_i = \{-1, 1\} \rightarrow m = -1, 0(\text{random}), 1$



Non-Externality, Nearest Neighbor Interaction

例:) 正の情報量

多い

戦略はどちらか一方

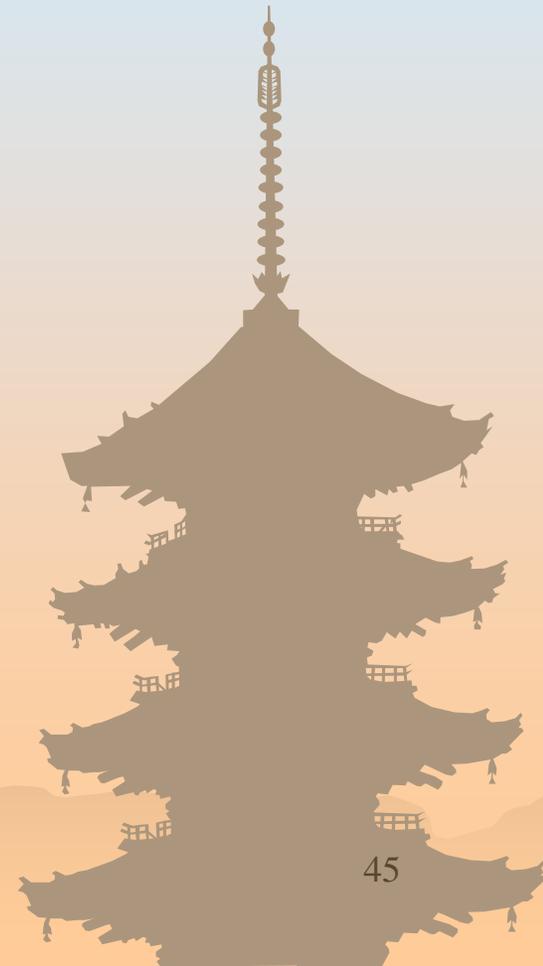
少ない

戦略はランダム



5. APPLICATION

Cont-Bouchaud's Model



Cont-Bouchaud の Percolation 市場モデル

- Herd behavior phenomena

投資者群れ(集団)の形成

The *interaction* and *communication* among agents.

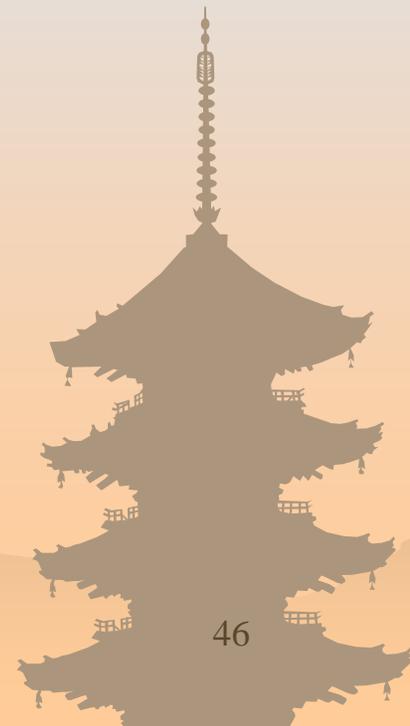
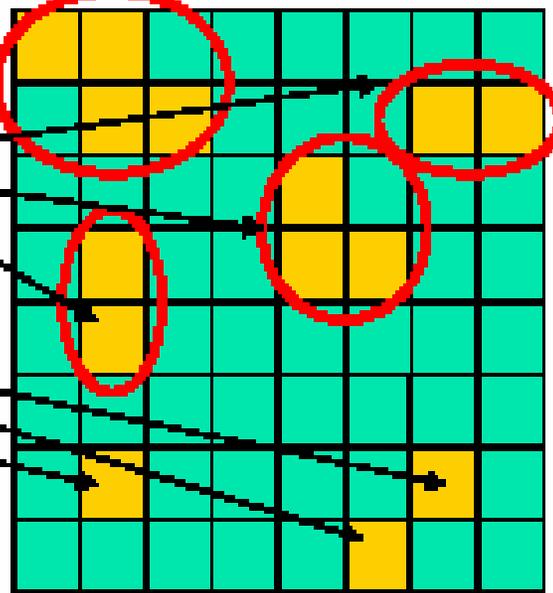
- Percolation Cluster \Leftrightarrow trading groups

IMAGE

大手投資ファンド

中堅証券会社A,B,C

個人投資家A,B,C



- ❁ A stock market with N AGENTS
- ❁ Trading a SINGLE asset
- ❁ The demand for stock of agent i is represented by a random variable $\Phi_i(t) (\in \{-1, 0, 1\})$

$\Phi_i(t) > 0$: BUY stock, < 0 : SELL stock, 0: not trade

- ❁ 価格(x)変動の更新

$$x(t+1) - x(t) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^N \phi_i(t)$$

λ - Market Depth

It measure the sensitivity of price to fluctuations in excess demand

CLUSTER あり

The number of clusters (coalitions)

The size of cluster

$$x(t) = \frac{1}{\lambda} \sum_{\alpha=1}^k W_{\alpha} \phi_{\alpha}(t)$$

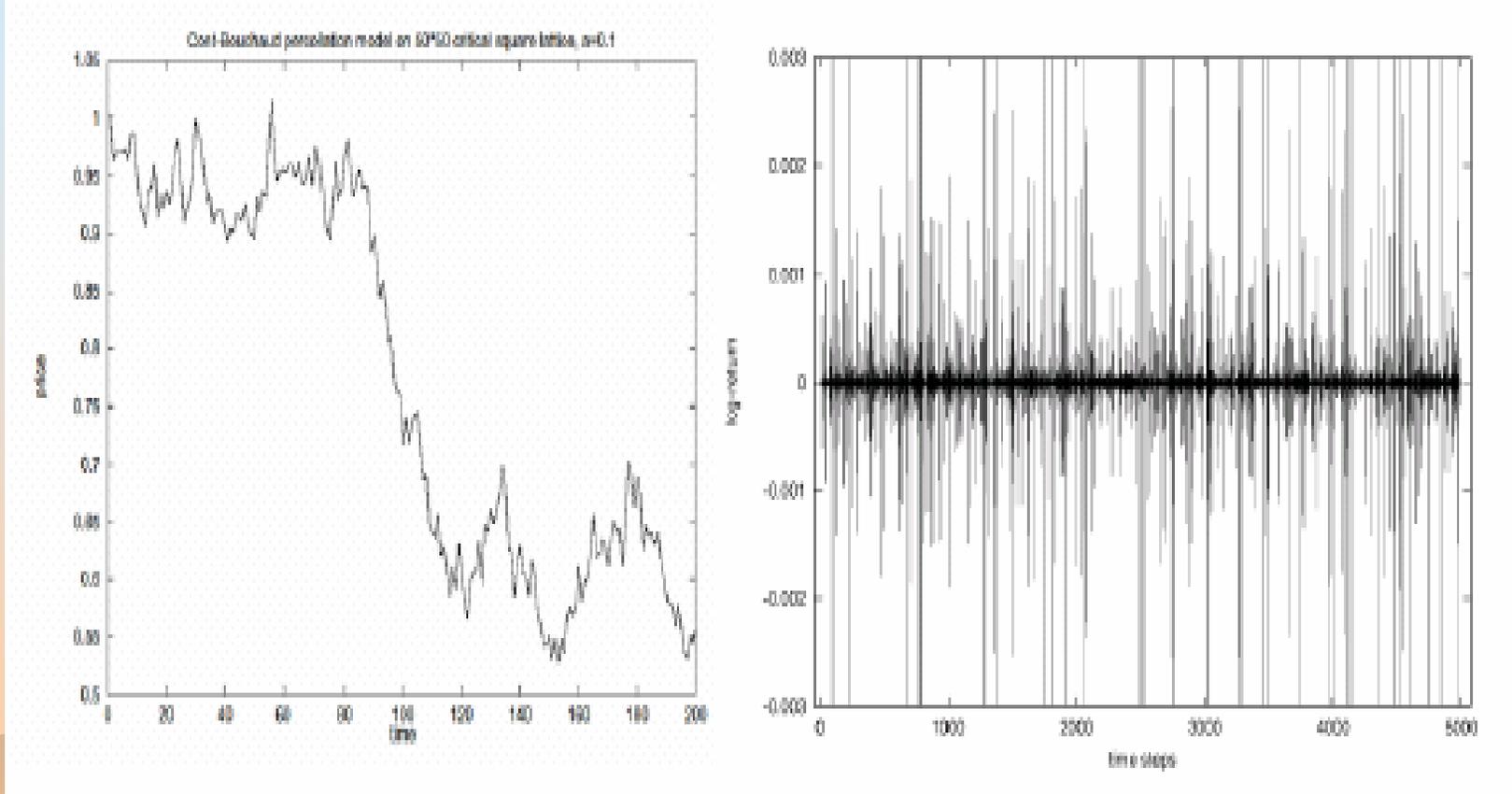
Aggregate Excess Demand

RULE

- ❁ ある占有確率 p を持って多次元格子上でパーコレーションクラスターを生成する。
- ❁ Hoshen-Kopelman 法によるトレーダー集団（クラスター）を識別する。
- ❁ Parameter c ($p=c/N$) の導入
 - ' c ' represents the willings of agents to align their actions. (hereafter "coordination parameter")
- ❁ c : 大・小(≤ 1) 提携を結びたくなる、ならない。
- ❁ $\frac{1}{2}$ の確率で買いまたは売りの注文をする。

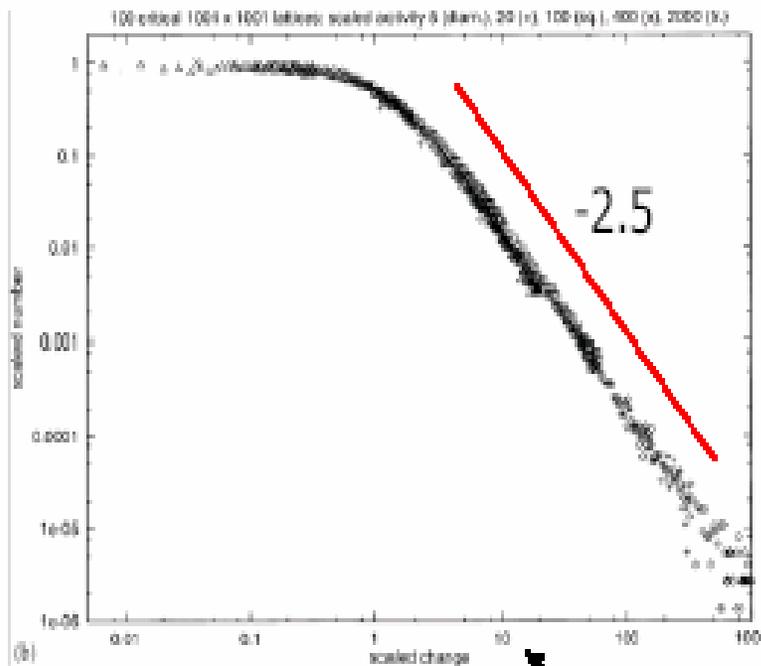
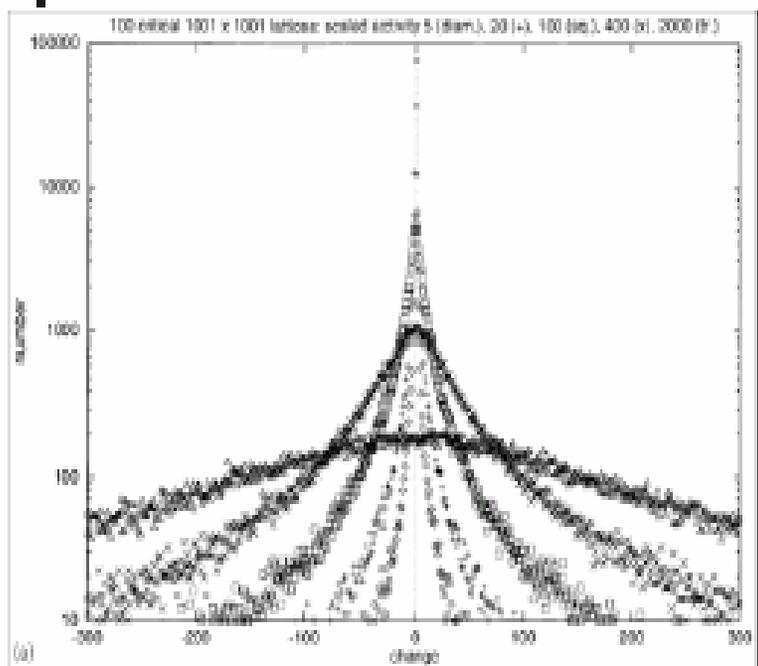
価格変動

$$p = p_c$$



陳昱 パーコレーションと金融市場の価格変動 より転載

価格変動分布の急尖性と相似性



陳昱 パーコレーションと金融市場の価格変動 より転載

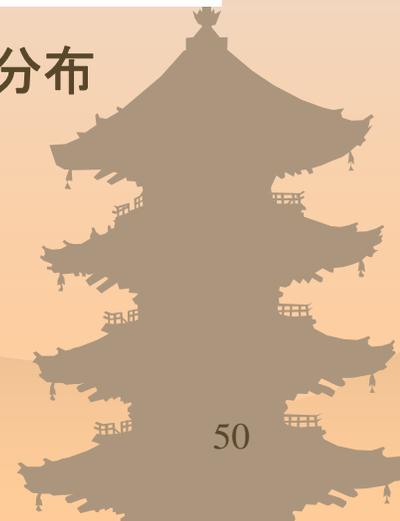
百万個格子点： $p = p_c$

c 大きくなる → Δt 大きくなる

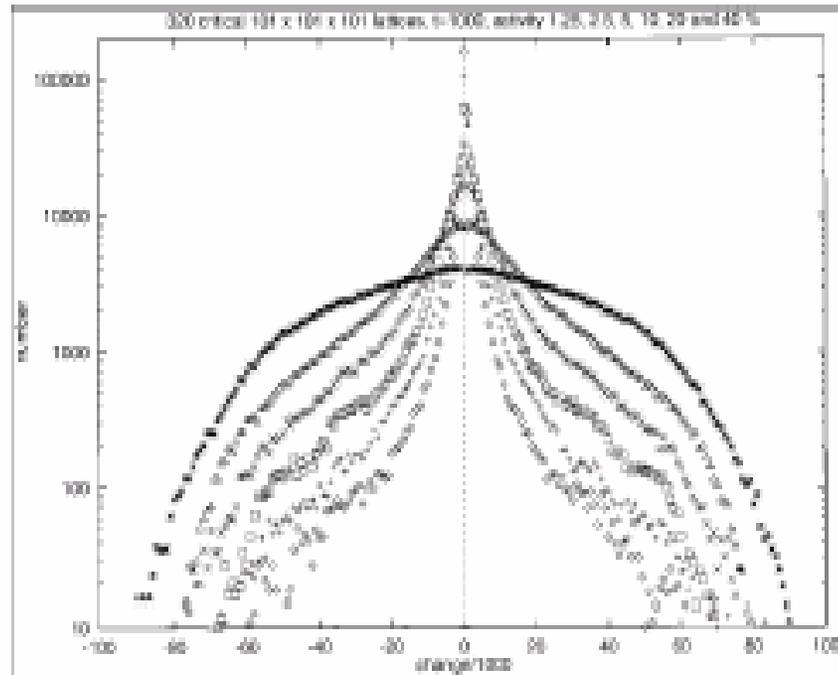
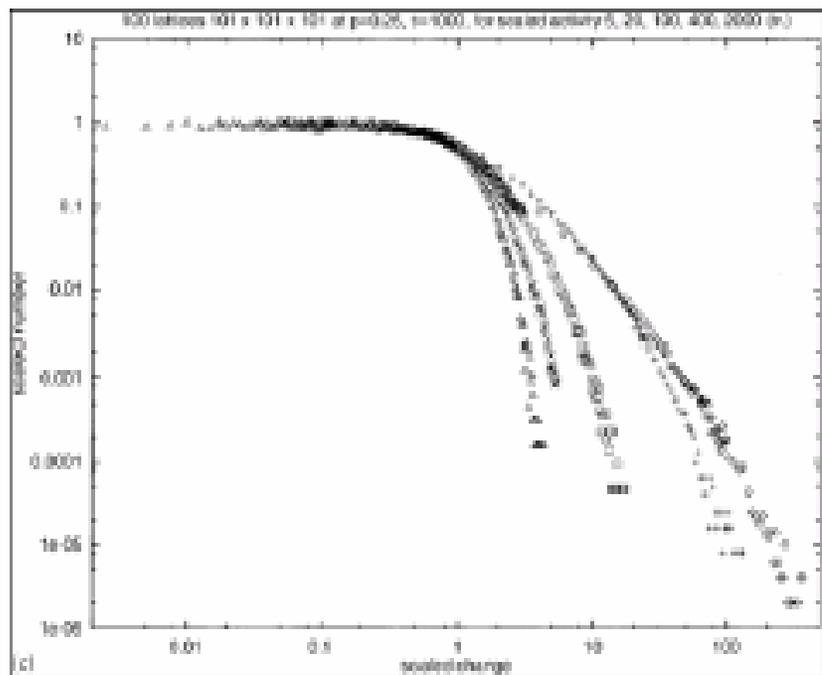
べき乗分布 → ベル型分布

正規化された分布は同じ曲線にのる

累積分布



価格分布の相似性の失いと正規分布への転換



$P=0.25$ 臨界値よりも小さい場合

c が大きくなっていく場合

陳昱 パーコレーションと金融市場の価格変動 より転載

RELATION TO OUR MODEL

- ❁ 我々のモデルのIsing Typeは、Cont-Bouchaud の理論的基礎付けとなるもの。進化ゲーム理論を基礎としているので、Noise Trader の存在をも認めている。よりミクロ的な側面を表現できる。
- ❁ 異なる点 : coordination parameter の有無
- ❁ 各主体の戦略2つ{売る、買う}、その戦略を集計し、価格が決定する。秩序パラメータは価格と同じ
- ❁ 正の情報量が多い→Clusterが生まれやすくなる→価格の変動が大きくなる。
- ❁ 相転移が起こると、価格が大幅に上がる or 下がる。
- ❁ Clusterが生まれていなくとも、* 無限クラスターが存在する。

Cont-Bouchaudを拡張

❁ Spin Glass の理論

→相互作用の強さが一定ではない。

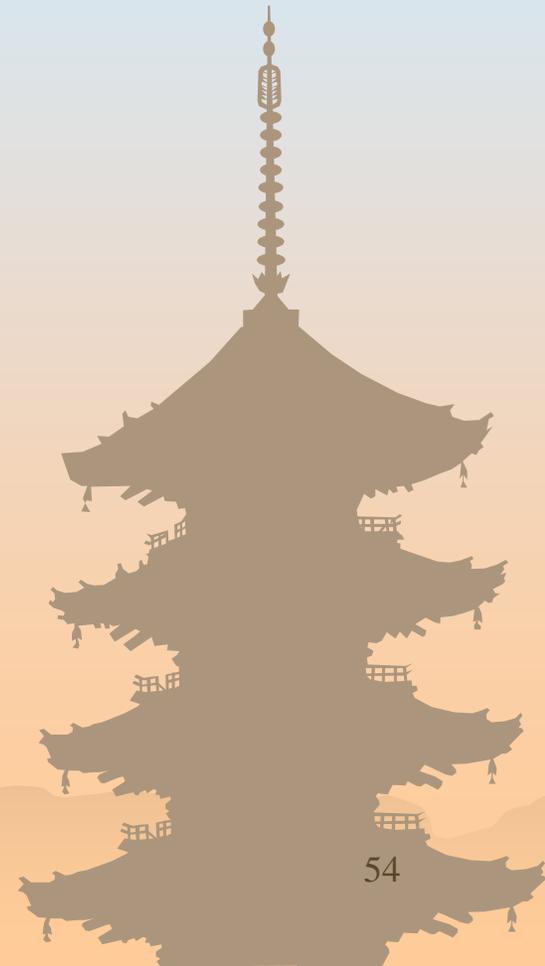
❁ Annealed系→各主体は当初から制度的要因が存在するが、自由に行動できる→秩序変数は点 (singleton)に (Replicator系と同様に)→価格は上がる、下がる、変化せず。

❁ Quenched系→各主体は当初から制度的要因が存在し、それに引きずられる→ Ising Typeと同じ結論に。また外部性がある場合→ Quenched系では多重均衡が発生。

❁ Clusterのサイズはスケーリング則の存在

❁ ちゃんと1つずつモデルを構築してみると、経済物理学で研究されているものは特殊なものではない。

6. Summary and Future Work



SUMMARY

変数を一つ増やし(利得が高ければ、確率1で増加するものを、ある変数によるとした)、複雑な状況の存在を示した。

- ❁ Sec. 2: Ising Model を用いて、最近接とゲームを行うモデルの定式化し、ESSを特徴づけた。
- ❁ Sec. 3: SK Modelを用いて、ランダムにマッチングし、ゲームを行うモデルの定式化を行った。
→2つのモデルとも変数によって、ランダムになるものと、2つの秩序・均衡が存在するというを示した。また無限人経済では均衡は存在しない。
- ❁ Sec.4: 動学にし、外部性が存在する、Quenched Systemでは多重解の存在→多様な状態を記述？
- ❁ Sec.5: 経済物理学のモデルへの応用

FUTURE WORKS: 数学的にちゃんと書く。

Fin

MAJOR REFERENCE

- ❁ Bishop, D. T. and Cannings, C.: "Models of animal conflict," *Advances in Applied Probability*, Vol. **8** (1976), No. 4, pp. 616-621.
- ❁ Coniglio, A. N., Chiara R., Peruggi, F. and Russo, L.: "Percolation and phase transitions in the Ising model," *Communications in Mathematical Physics*, Vol. **51**, Number 3 (October, 1976), pp. 315-323.
- ❁ Cont, R. and Bouchaud, J-P.: "Herd Behavior and Aggregate Fluctuations in Financial Markets," *Macroeconomic Dynamics*, **4** (2000), pp. 170-196.
- ❁ Diederich, S. and Opper, M.: "Replicators with random interactions: A solvable model," *Physical Review A*, Vol. **39**, Number 8 (1989), pp. 4333-4336.
- ❁ Glauber, R. J.: "Time-dependent statistics of the Ising model," *Journal of Mathematical Physics*, Vol. **4** (1963), pp. 294-307.
- ❁ 樋口保成: 「イジングモデルのパーコレーション」 *数学*, Vol. 47 (1995), pp. 111-124.
- ❁ 吉川満: 「統計力学を用いた進化ゲーム理論」『京都大学数理解析研究所講究録』2008年, 印刷中.
- ❁ Mezard, M., Parisi, G. and Virasoro, M. A.: *Spin Glass Theory and Beyond*, World Scientific, 1987.
- ❁ Weibull, J.W.: *Evolutionary Game Theory*, MIT Press, 1995.

REMARK: THIS TALK

- ❁ この報告内容は2007年度関西学院大学経済学研究会主催の「夏季研究会」,「第4回 生物数学の理論と応用」にて報告したものを、大幅に加筆・訂正したものである。具体的には「Percolation」の部分を加筆した。また経済物理学との関連を重視し、Cont- Bouchaud モデルを取り上げた。

2007年12月 吉川 満。