進化ゲーム理論入門 — Weibull [23] を読む

Mitsuru KIKKAWA
Meiji University
ver.2010/04/08

0. はじめに

本講義の目的は進化ゲーム理論の教科書的な存在である Weibull [23] を基礎として, 進化ゲーム理論を簡潔に解説することである.

本講義ではまず, 第 1 節で非協力ゲームを取り上げ, 第 2 節で, 進化ゲーム理論の均衡概念を, 最後に, 進化プロセスを説明することができる Replicator 方程式について取り上げる.

進化ゲーム理論に関連した文献を紹介する. まず古典として Maynard Smith [14], Axelrod [1] が挙げられる. 次に Weibull [23] の以外の教科書的な存在として, Hofbauer and Sigmund [8] は数理生物学向きであり, Vega-Redondo [22], Samuelson [19] は経済学向きである. また個別具体的なテーマに絞った Fudenberg and Levine [5], Young [24] がある. さらにはより直感的なことを学びたい人のためには, 社会学者により書かれた石原, 金井 [9], 大浦 [17] に目を通されたい.

また (進化) ゲーム理論を勉強する際には, 位相数学 (トポロジー) の知識が不可欠である. ゲーム理論に必要な基本的な事項を解説している良書として, 丸山 [12] を挙げておく.

1. 非協力ゲーム理論

この節では非協力ゲーム理論を取り上げる. ここでは Weibull [23] の第 1 章に対応している.

1.1 準備 : 戦略形ゲーム, 混合拡大

1.1. では戦略形ゲームを定式化している. まとめると, 次のようなことを言っている.

定義. 戦略形 (strategic form)n **人ゲーム**とは次の要素の組によって定義される.

(1.1) $$G = \big(N, \{S_i\}_{i\in N}, \{f_i\}_{i\in N}\big)$$

ここで, (i) $N = \{1, 2, \cdots, n\}$ はプレイヤーの集合, (ii) S_i はプレイヤー i の選択可能な行動あるいは戦略の集合, また全員の手は戦略セット $\vec{s} = s_1, \cdots, s_n$ と表記する. (iii) f_i は直積集合 $\vec{S} = S_1 \times \cdots \times S_n$ から実数への可測関数であり, プレイヤー i の利得関数を表す. ——

このゲームは次のようにプレイされる. すべてのプレイヤー $1, \cdots, n$ は他のプレイヤーの選択を知らずにそれぞれの戦略 $s_1 \in S_1, \cdots, s_n \in S_n$ を選択する. つまり独立性の仮定がある. そのゲームの結果, プレイヤー i は利得 $f_i(\vec{s})$ を得る. またこのような戦略 s_i をプレイヤー i の**純粋戦略**(pure strategy) という.

仮定. 戦略 $q_i, i = 1, \cdots, n$ は**独立**(independent) であるとする. ——

仮定. $\forall i$, S_i は可分完備距離空間である. ——

仮定. $\forall i$, $f_i : \vec{s} \to \mathcal{R}$ は有界連続関数である. ——

仮定. プレイヤーの目的は自己の利得最大化である. ——

仮定. 共有知識(common knowledge): プレイヤー全員は自分に関してはもちろん, プレイヤー全員の利得関数を知っている. ——

1.1.1, **1.1.2** ではある確率分布に従って選択を行う戦略である混合戦略のことを取り上げている. 先ほどの戦略形ゲームにおいて, 各主体が混合戦略をとる場合を考慮に入れたゲームを混合拡大という.

定義. 戦略形 n 人ゲーム G の**混合拡大**(mixed extension) とは, 次の要素の組で定義される.

(1.2) $$G^* = \big(N, \{Q_i\}_{i\in N}, \{F_i\}_{i\in N}\big)$$

ここで, (i) $N = \{1, 2, \cdots, n\}$ はプレイヤーの集合, (ii) Q_i は S_i 上の確率分布の全体であり, S_i 上の確率分布 q_i をプレイヤー i の**混合戦略**(mixed strategy) といい, 確率変数[1]を表している. また確率ベクトル $\vec{q} = q_1, \cdots, q_n$ と表記する. (iii) F_i は直積集合 $\vec{Q} = Q_1 \times \cdots \times Q_n$ 上の実数値関数であり, 次のように定義される.

(1.3) $$F_i(\vec{q}) = \int_{\vec{Q}} f_i(\vec{s}) d\mu(\vec{s})$$

ここで μ は $\vec{q}$ の分布である. また $F_i(\vec{q})$ をプレイヤー i の**期待利得関数**(expected payoff function) という. ま

[1] 形式的には可測空間 (Ω, S_i)(ただし Ω は空間, S_i を空間 Ω の部分集合の σ-加法族とする) 上の S_i を定義域とする実数値関数 q_i が確率変数となっていることを表している.

た期待利得関数のセットを $\vec{F} = F_1, \cdots, F_n$ と表記する．——

1.2 準備：支配, 最適応答

1.2 では支配戦略と最適反応に関しての定義が書かれている．まず支配戦略について定義する．ここで単位単体 $\Delta_i = \left\{ x_i \in \mathcal{R}_+^{m_i} : \sum_{h=1}^{m_i} x_{ih} = 1 \right\}$, 混合戦略の空間 $\Theta = \times_{i \in I} \Delta_i$ とする．

定義 1.1 $y_i \in \Delta_i$ が $x_i \in \Delta_i$ を**弱支配する**(weakly dominate) とは, すべての $z \in \Theta$ について $u_i(y_i, z_{-i}) \geq u_i(x_i, z_{-i})$, かつ, ある $z \in \Theta$ については狭義の不等号が成り立つときである．ある戦略 x_i が**支配されない**(undominated) 戦略であるとは, このような戦略 y_i が存在しないときをいう．——

定義 1.2 $y_i \in \Delta_i$ が $x_i \in \Delta_i$ を**強支配する**(strict dominate) とは, すべての $z \in \Theta$ について $u_i(y_i, z_{-i}) > u_i(x_i, z_{-i})$ となるときをいう．

定義． ゲーム $G^* = \left(N, \{Q_i\}_{i \in N}, \{F_i\}_{i \in N}\right)$ の**実現可能集合**(feasible set) U は, 次のように定義される．

$$U = \{\vec{F}(\vec{q}) \mid \vec{q} \in \vec{Q}\} \text{ ——}$$

定義． プレイヤー i の戦略 $q_i \in Q_i$ が他の $n-1$ 人のプレイヤーの戦略の組 $q_{-i} = (q_1, \cdots, q_{i-1}, q_{i+1}, \cdots, q_n)$ に対する**最適応答**(best response) であるとは,

$$F_i(q_i, q_{-i}) = \max_{r_i \in Q_i} F_i(r_i, q_{-i}) \tag{1.4}$$

であるときをいう．戦略の組 q_{-i} に対するプレイヤー i の最適応答の全体を, $B_i(q_{-i})$ とおく．——

注意． 写像 $B_i(q_{-i})$ は直積集合 $Q_1 \times \cdots \times Q_{i-1} \times Q_{i+1} \times \cdots \times Q_n$ から集合 Q_j への点対集合写像となり, プレイヤー i の**最適応答対応**(best response correspondence) と呼ばれる．——

1.3 Nash 均衡

この **1.3** では, Nash 均衡の定義と存在証明についてである．

定義 1.3 戦略形 n 人ゲーム G^* において, プレイヤーの戦略の組 $\vec{q}^* = (q_1^*, \cdots, q_n^*)$ が **Nash 均衡点**(equilibrium) であるとは, すべてのプレイヤー $i(=1, \cdots, n)$ に対して戦略 q_i^* が他のプレイヤーの戦略の組 q_{-i}^* に対する最適応答であるときをいう．——

この Nash 均衡には 2 通りの解釈が存在する．Nash の博士論文 [11] には, 1 つ目が合理的な人間が行ったゲームの結果, その戦略を採用し, それを変更させる誘因がないものを言う．2 つ目が Mass-Action(質量作用) という見方で, 先ほどのような合理性を仮定しなくとも, あるゲームに参加している多くの主体の相互作用を考察し, その結果として平均的に採用する戦略を Nash 均衡とした．よってこの第 2 番目の見方が主に進化ゲーム理論で使われている Nash 均衡に該当する．

ここで戦略の組 $\vec{q}$ に対して, 集合 $B(q) = B_1(q_{-1}) \times \cdots \times B_n(q_{-n})$ とする．

定理． ゲーム G^* において混合戦略の組 $\vec{q}^* = (q_1^*, \cdots, q_n^*)$ が Nash 均衡点であるための必要十分条件は次が成り立つことである．

$$\vec{q}^* \in B(q^*) \text{ ——} \tag{1.5}$$

証明 均衡点の定義から示せる．□

定理 1.1 ゲーム G^* において, 混合戦略の範囲で少なくとも 1 つの Nash 均衡点が存在する．——

証明 最適応答対応が次の角谷の不動点定理の条件を満たすことを示せばよい．

(1) プレイヤー i の純粋戦略の数を m_i とすると, プレイヤー i の混合戦略の集合 Q_i は m_i 次元ユークリッド空間の $(m_i - 1)$ 次元単体であり, コンパクトな凸部分集合である．したがって, 直積空間 $Q = Q_1 \times \cdots \times Q_n$ も $m = m_1 + \cdots + m_n$ 次元ユークリッド空間のコンパクトな凸部分集合となる．

(2) プレイヤー i の期待利得関数 $F_i(q_1, \cdots, q_n)$ は連続で変数 q_i に関して線形な関数だから, 他のプレイヤーの戦略の組 q_{-i} に対するプレイヤー i の最適応答の集合 $B_i(q_{-i})$ は Q_i の非空な凸部分集合となる．

したがって, 全ての混合戦略の組 $q = (q_1, \cdots, q_n) \in Q$ に対して,

$$B(q) = B_1(q_{-1}) \times \cdots \times B_n(q_{-n})$$

も非空な凸部分集合となる．

(3) 直積集合 $Q = Q_1 \times \cdots \times Q_n$ 内の 2 つの点列 $\{q^\nu = (q_1^\nu, \cdots, q_n^\nu)\}_{v=1}^\infty$ と $\{q^{-\nu} = (q_1^{-\nu}, \cdots, q_n^{-\nu})\}_{v=1}^\infty$ に対して,

$$q^{-\nu} \in B(q^\nu),\ \nu = 1, 2, \cdots$$
$$q^\nu \to q^O,\ q^{-\nu} \to q^{-O}\ (v \to \infty)$$

とする．

このとき, ゲームの最適応答対応 $B(\cdot)$ の定義より, 全てのプレイヤー $i(=1,\cdots,n)$ の任意の混合戦略 $t_i \in Q_i$ に対して,

$$F_i(q_i^{-v}, q_{-i}^v) \geq F_i(t_i, q_{-i}^v)$$

が成立する．この両辺で $v \to \infty$ とすると, 期待利得関数 $F_i(q_i, q_{-i})$ の連続性より,

$$F_i(q_i^{-O}, q_{-i}^O) \geq F_i(t_i, q_{-i}^O)$$

がいえる．t_i は Q_i の任意の元だから, $q_i^{-O} \in B_i(q_{-i}^O)$ $(i=1,\cdots,n)$ である．ゆえに, $q^{-O} \in B(q^O)$ である．□

定理. (角谷の不動点定理[2]) S を可分完備距離空間の非空, コンパクト, 凸集合とし, $F(\cdot)$ を S から S への点対集合写像で, 次の 2 条件を満たすとする．

(i) すべての $x \in S$ に対して $F(x)$ は S の非空な凸部分集合である．

(ii) S 内の任意の点列 $\{x_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ と $\{y_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ に対して,

$y_\nu \in F(x_\nu)$, $\nu = 1, 2, \cdots$, $x_\nu \to x_O$,$y_\nu \to y_O$ $(\nu \to \infty)$ ならば, $y_O \in F(x_O)$ である．

このとき, $x^* \in F(x^*)$ となる写像 $F(\cdot)$ の不動点 x^* が少なくとも 1 つ存在する．——

1.4 Nash 均衡の精緻化

ここでは 2 つの定義を紹介する．1 つ目は Selten [20] が提案した完全という概念, 2 つ目は Myerson [15] が提案したプロパーという概念である．ここで摂動ゲームを $G(\mu) = (I, \Theta(\mu), u)$, ただし $\Theta(\mu) = \times_{i=1}^n \Delta_i(\mu)$ int (Θ), また Nash 均衡の集合を Θ^{NE} とする．

定義 1.4 $x \in \Theta^{NE}$ が**完全**(perfect) であるとは, 摂動ゲームのある列 $\{G(\mu^t)\}_{\mu^t \to 0}$ に対して, $x^t \to x$ となるプロファイル $x^t \in \Theta^{NE}(\mu^t)$ が存在するときをいう．

ここでは完全 Nash 均衡の集合を Θ^{PE} と書くと, 次の命題が得られる．

命題 1.3 任意の (有限) ゲームに対し, $\Theta^{PE} \neq \emptyset$.

証明 任意の列 $\{G(\mu^t)\}_{\mu^t \to 0}$ に対し, 各 t について $x^t \in \Theta^{NE}(\mu^t)$ とする．$\{x^t\}_{t=1}^\infty$ はコンパクト集合 Θ の列だから, 収束する部分列 $\{y^s\}_{s=1}^\infty$ を持ち, その極限 x^* は $x^* \in \Theta$. 各 s に対し, $G(\mu^s)$ は対応する摂動ゲームである．連続性による通常の論法により, $x^* \in \Theta^{NE}$. さらに, $y^s \to x^*$ かつ, すべての s に対し $y^s \in \Theta^{NE}(\mu^s)$ なので, x^* は完全である．□

命題 1.4 任意の $x \in \Theta^{PE}$ は支配されない．2 人ゲームでは, $x \in \Theta^{NE}$ が支配されないならば, $x \in \Theta^{PE}$.

証明 van Damme [4] を参照されたい．

上記の完全性の基準は, ある摂動に関してのみ頑健性を要求するが, この摂動が何らかの意味で合理的なものであるという条件は課していない．Myerson [15] は, この点に関してより厳しい頑健性の基準を提案した．その考え方が要求するのは, より費用のかからない誤りより, より費用のかかる誤りの方が起こりやすくはないというような, ある摂動に対する頑健性である．例えばプレーヤーはあたかも損害の小さな誤りよりも損害の大きい誤りをより警戒するかのようにふるまうであろうと考えるのである．

ある $\varepsilon > 0$ を与えたとき, 戦略プロファイル $y \in$ int (Θ) が $\varepsilon-$ プロパー ($\varepsilon-$proper) であるとは,

$$u_i(e_i^h, y_{-i}) < u_i(e_i^k, y_{-i}) \Rightarrow y_{ih} \leq \varepsilon y_{ik}. \tag{1.27}$$

が成り立つときをいう．

任意の内部 Nash 均衡 $y \in \Theta^{NE}$ において, 各プレイヤー i のすべての純粋戦略が, y に対して同じ (最大) 利得をもたらすので, 任意の $\varepsilon > 0$ について $\varepsilon-$ プロパーである．

定義 1.5 $x \in \Theta^{NE}$ が**プロパー**(proper) であるとは, ある列 $\varepsilon^t \to 0$ に対して, $y(\varepsilon^t) \to x$ が存在するときをいう．

全ての内部の Nash 均衡 x はプロパーである．Myerson [15] はプロパー均衡が常に存在し, かつどのプロパー Nash 均衡も完全であることを示した．

2. 進化的安定性基準

この節では進化ゲーム理論における均衡概念を取り上げる．ここでは主に Weibull [23] の第 2 章に対応している．ここ節の内容は van Damme [4] が詳しい．

[2] 原論文 Kakutani [10] では $\mathcal{R}^l$ の場合だけが扱われているが, ここではより一般的に可分完備距離空間の場合を考える．

2.1 進化的安定戦略

まず進化ゲーム理論解概念として最も重要な Maynard Smith [13] が提案した進化的安定な戦略の定義を行う．

定義 2.1 $x \in \Delta$ が**進化的に安定な戦略**(Evolutionary Stable Strategy, ESS) であるとは，どのような戦略 $y \neq x$ に対しても，ある $\bar{\epsilon}_y \in (0,1)$ が存在し，すべての $\varepsilon \in (0, \bar{\epsilon}_y)$ について次の不等式が成り立つことをいう．

$$(2.1) \qquad u\big[x, \varepsilon y + (1-\varepsilon)x\big] > u\big[y, \varepsilon y + (1-\varepsilon)x\big]. \text{ ——}$$

次の命題を示す際には，利得に関する線形性を課しておく必要がある．

命題 2.1 (Bishop and Cannings [2]) 進化的安定な戦略は以下の条件と同値である．

$$(2.3) \qquad u(y,x) \le u(x,x), \qquad \forall y,$$

$$(2.4) \qquad u(y,x) = u(y,y) \quad \Rightarrow \quad u(y,y) < u(x,y), \quad \forall y \neq x. \text{ ——}$$

証明 ここで次のようなスコア関数 $f : [0,1] \to \mathcal{R}$ を考える．

$$f_y(\varepsilon) = u(x-y, \varepsilon y + (1-\varepsilon)x).$$

これは定義 2.1 における (2.1) の左辺から右辺を引いたものである．定義 2.1 から $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}(y)$ においてスコア関数の値が正でなければならない．またこれを次にように式変形する．

$$(2.5) \qquad f_y(\varepsilon) = u(x-y, x) + \varepsilon u(x-y, y-x)$$

よってこの関数が $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}(y))$ の下で正となる条件を導けばよいことになる．

1) $\varepsilon = 0$ においてこの関数の切片が非負であること．すなわち $u(x-y,x) \ge 0$.

2) 仮に $\varepsilon = 0$ において切片が 0 であるならば，$\varepsilon > 0$ において関数のグラフの傾きが正であること．すなわち $u(x-y,x) = 0$ ならば，$u(x-y, y-x) = u(x-y, y) > 0$ であることである．

以上から $u(x-y,x) \ge 0$ は $u(x,x) \ge u(y,x)$, また $u(x-y,y) > 0$ は $u(x,y) > u(y,y)$ となる．□

よってこの命題からも分かるように，ESS は Nash 均衡条件と，漸近安定条件の 2 つから成っていることが分かる．

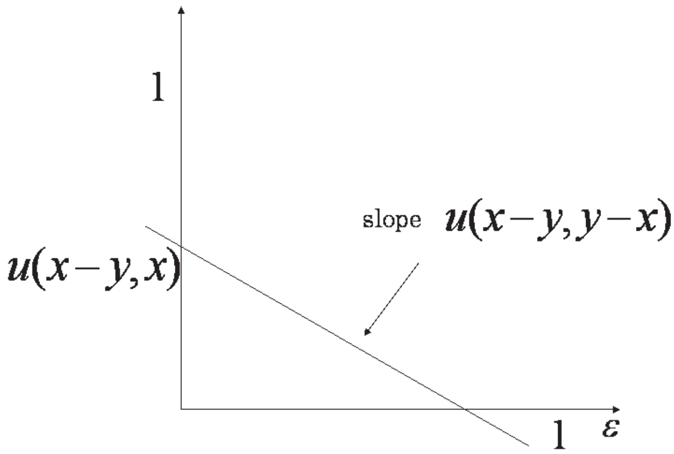

図 1: 戦略 y に対して評価された戦略 x のスコア関数 f.

次に ESS 集合の構造について調べる.(Haigh [6]) ここである混合戦略 x_i において正の確率が割り当てられた純粋戦略の集合を x_i の**台**(support) と呼び，次のように書く．

$$C(x_i) = \{h \in S_i : x_{ih} > 0\}.$$

命題 2.2 $x \in \Delta^{ESS}$ であり，かつある戦略 $y \neq x$ に対して $C(y) \subset C(x)$ ならば，$y \notin \Delta^{NE}$.

証明 $x \in \Delta^{ESS}$ とし，ある戦略 $y \neq x$ に対し $C(y) \subset C(x)$ とする．このとき $x \in \Delta^{NE}$ により $u(y,x) = u(x,x)$ であり，(2.4) により，$u(x,y) > u(y,y)$. したがって，$y \notin \Delta^{NE}$. □

この命題は意味するところは，ひとつの ESS の台は，別の ESS の台を含まないということである．

系 2.2.1 集合 $\Delta^{ESS} \subset \Delta$ は有限である．もし $x \in \Delta^{ESS} \cap \operatorname{int}(\Delta)$ ならば $\Delta^{ESS} = \{x\}$.

この系は意味するところは，もし ESS が内点でならば，それはそのゲームのただひとつの ESS である．さらに (有限ゲームでは) 有限個の台の集合しか存在しないので，ESS の数はいつも有限である．

次にこの ESS と第 1 節で定義した均衡との関係を考察する．

命題 2.3 $x \in \Delta$ が弱支配されているならば, $x \notin \Delta^{ESS}$.

証明 弱支配されている戦略がESSであるとする. $x \in \Delta^{NE}$ は $y \in \Delta$ により弱支配されているとする. そのとき y は x に対しての最適応答で, 弱支配しているので, $u(y,y) \geq u(x,y)$ が得られる. しかし x は命題 2.1 の第 2 条件に反するので, 矛盾. □

系 2.3.1 $x \in \Delta^{ESS}$ ならば, $(x,x) \in \Theta^{PE}$.

証明 もし戦略 x が進化的に安定ならば, プロファイル $(x,x) \in \Theta$ は支配されない Nash 均衡である. 命題 1.4 から 2 人ゲームでは, どんな支配されない Nash 均衡も完全である. □

命題 2.4 $x \in \Delta^{ESS}$ ならば, $(x,x) \in \Theta^{NE}$ はプロパー均衡である.

証明 van Damme [4] を参照されたい.

2.2 ESS の特徴づけ

ここではESSを特徴づける. まず Hofbauer, et al. [7] が定義した一様侵入障壁と局所的優越を取り上げる. ESS の定義において, 侵入障壁 $\bar{\varepsilon}_y$ は可変であった. ここではより限定して, 侵入障壁が一様な場合を取り上げる.

定義 2.2 $x \in \Delta$ が**一様侵入障壁**(uniform invasion barrier) をもつとは, 全ての戦略 $y \neq x$ とあらゆる $\varepsilon \in (0,\bar{\varepsilon})$ に対して, 不等式 (2.1) が成り立つようなある $\bar{\varepsilon} \in (0,1)$ が存在することをいう.

これに関連した命題を証明する前に, 任意の与えられた $x \in \Delta^{ESS}$ に関して, その侵入障壁 $b(y)$ を次のように定義する. すなわち, x 以外の任意の戦略 y に対する侵入障壁 $b(y)$ とは, 不等式 (2.1) の定義に現れる $\bar{\varepsilon}_y$ の上限値である. 形式的には次のようである.

$$b(y) = \sup\{\delta \in [0,1] : f(\varepsilon,y) > 0, \forall \varepsilon \in (0,\delta)\} \tag{2.6}$$

命題 2.5 $x \in \Delta^{ESS}$ であるための必要十分条件は, x が一様侵入障壁をもつことである.

証明 必要条件は, すべての戦略 $y \neq x$ について, $\bar{\varepsilon}_y = \bar{\varepsilon}$ と選ぶことで, ESS の定義から直ちに得られる. 十分条件については, 以下のように示される. $x \in \Delta^{ESS}$ とする. また, $Z_x \subset bd(\Delta)$ を x を含まない Δ の全ての境界面の合併とする. すなわち, $Z_x = \{z \in \Delta :$ ある $i \in C(x)$ に対して $z_i = 0\}$. さらに障壁関数 $b : Z_x \to [0,1]$ を上記の (2.6) で定義する.

いま $y \in Z_x$ をひとつ固定し, (2.5) で定義されスコア関数 $f(\cdot,y)$ を考える. $x \in \Delta^{ESS}$ なので, $f(\varepsilon,y) = 0$ を満たす ε は高々ひとつである. それをここでは ε_0 と表そう. $\varepsilon_0 \in (0,1)$ のケースでは, $u(x-y,x-y) \neq 0$ であり, よって $b(y) = \varepsilon_0 = u(x-y,x)/u(x-y,x-y)$ である. それ以外のケースでは $b(y) = 1$ である. これらのことから容易に確認できるように, b は連続関数である. b は正であり, 集合 Z_x がコンパクトなので, $\min_{y \in Z_x} b(y) > 0$ が存在する.

すべての $y \in Z_x$ については所望の結果を得たので, 次に, $y \in \Delta$ かつ $y \neq x$ なる y について考える. このとき, ある $z \in Z_x$ と $\lambda \in (0,1]$ が存在して, $y = \lambda z + (1-\lambda)x$ である. このことは $b(y) \geq b(z)$ を意味する. なぜなら,

$$f(\varepsilon,y) = u(x-y,(1-\varepsilon\lambda)x + \varepsilon\lambda z) = \lambda f(\varepsilon\lambda, z).$$

したがって, $b(y) = \min\{b(z)/\lambda, 1\} \geq b(z)(>0)$ である. □

ESS とは全てにおいて, 突然変異戦略よりも利得が高いということを示していたが, ここでは ESS が近傍において, 突然変異戦略よりも利得が高い場合を次のように定義する.

定義 2.3 $x \in \Delta$ が**局所的優越**(locally superior) であるとは, それがある近傍 U をもち, U の中のすべての $y \neq x$ に対し $u(x,y) > u(y,y)$ が成り立つことをいう.

命題 2.6 $x \in \Delta^{ESS}$ であるための必要十分条件は, x が局所的優越となることである.

証明 まず必要条件を示す. $U \subset \mathcal{R}^k$ を x の近傍とし, すべての $y \neq x, y \in \Delta \cap U$ について $u(x,y) > u(y,y)$ が成り立つとする. このとき, 任意の $z \neq x, z \in \Delta$ について, ある $\bar{\varepsilon}_z \in (0,1)$ が存在して, 全ての $\varepsilon \in (0,\bar{\varepsilon}_z)$, $w = \varepsilon z + (1-\varepsilon)x \in U$ が成り立つようにすることができる. よって仮定より, $u(x,w) > u(w,w)$ である. u の双線形性より

$$u(w,w) = \varepsilon u(z,w) + (1-\varepsilon)u(x,w),$$

なので, $u(x,w) > u(w,w) \Leftrightarrow 0 > u(z,w) - u(x,w)$. よって $x \in \Delta^{ESS}$ である.

次に十分条件を示すために, $x \in \Delta^{ESS}$ とし, $\bar{\varepsilon} \in$

$(0,1)$ をその一様侵入障壁, $Z_x \subset bd(\Delta)$ を命題 2.5 と同様に, x を含まない Δ の全ての境界面の合併とする. さらに,

$V = \{y \in \Delta : y = \varepsilon z + (1-\varepsilon)x$ ある $z \in Z_x$ と $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon})$ に対して $\}$

とする. Z_x は x を含まない閉集合なので, x のある近傍 $U \subset \mathcal{R}^k$ で $U \cap \Delta \subset V$ となるものが存在する. いま $y \neq x, y \in \Delta \cap U$ とする. このとき, $y \in V$ であり, よって命題 2.5 により $u(z,y) < u(x,y)$ となる. ただし z は V の定義に示されたものである. u の双線形性によって, この不等式は $u(y,y) < u(x,y)$ と同値である. □

次に Maynard Smith [14] で導入した中立安定を紹介する.

定義 2.4 $x \in \Delta$ が**中立安定**(neutrally stable, NSS) であるとは, 各戦略 $y \in \Delta$ に対して, ある $\bar{\varepsilon}_y \in (0,1)$ が存在し, すべての $\varepsilon \in (0, \bar{\epsilon}_y)$ に対して次の不等式が成立することをいう.

$$(2.8) \qquad u\big[x, \varepsilon y + (1-\varepsilon)x\big] \geq u\big[y, \varepsilon y + (1-\varepsilon)x\big]$$

この定義は進化的安定性が同等, またはより高い利得を得る突然変異戦略が存在しないことを要求しているのに対し, 中立安定性は既存の戦略よりも高い利得(適応度) を得るような突然変異体が存在しないことを要請する.

命題 2.7 任意の $x \in \Delta$ に対して, 次の 3 つの条件は同値である.
a. $x \in \Delta^{NSS}$.
b. x は一様弱侵入障壁を持つ.
c. x は局所的弱優越である.

Swinkels [21] が提案した REE という概念を取り上げる. 進化的安定性の概念には, 突然変異戦略について何の制限もない. ここでは侵入後集団の中で最適となるような突然変異戦略, いわゆる均衡侵入に対してのみ, 頑健性を要求する. 既存戦略を $x \in \Delta$, 突然変異戦略を $y \in \Delta$, 変異の集団シェアを ε とすると, 侵入後混合戦略は $w = \varepsilon y + (1-\varepsilon)x \in \Delta$ である. このとき, もし y が w に対する最適反応ならば, y は**均衡侵入者**(equilibrium entrant) と呼ばれる.

定義 2.5 戦略 $x \in \Delta$ が, **均衡侵入に対して頑健である**(robust against equilibirum entrants, REE) とは, ある $\bar{\varepsilon} \in (0,1)$ が存在し, 全ての $y \neq x$ と $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ に対して, 次の条件 (2.12) が成立することをいう.

$$(2.12) \qquad y \notin \beta^*[\varepsilon y + (1-\varepsilon)x].$$

命題 2.8 $\Delta^{ESS} \subset \Delta^{REE} \subset \Delta^{NE}$.

証明 $x \in \Delta^{REE}$ としよう. また REE の定義の $\bar{\varepsilon}$ を用いて, $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ とする. 対応 $\alpha : \Delta \to \Delta$ を $\alpha(y) = \beta^*((1-\varepsilon)x + \varepsilon y)$ で定義する. このとき $\alpha(y) \subset \Delta$ に対して非空, 閉, かつ凸である. β^* は上半連続なので, α もまた上半連続である. したがって, 角谷の不動点定理により, ある y が存在し, $y \in \alpha(y)$ である. x は均衡侵入者に対して頑健であるから $y = x$ である. しかし, そのとき $x \in \alpha(x) = \beta^*(x)$ であり, よって $x \in \Delta^{NE}$. □

命題 2.9 $x \in \Delta$ が均衡侵入に対して頑健であるならば, $(x,x) \in \Theta^{NE}$ はプロパーである.

2.3 発展 : 適応力学系との関連

この節は Weibull [23] には掲載していないが, ゲームを無限戦略の集合が無限の場合に拡張し, Nash 均衡, ESS, CSS との関係を調べる. そのために純粋戦略が無限個存在する場合を考える (Eshel [3]).

仮定. 純粋戦略は無限集合であり, その実現可能集合 U は有界閉集合 (コンパクト) であるとする. ——

仮定. 利得関数 $F(q_i, q_j)$ は q_i, q_j 共に 2 回微分可能である. ——

定義. 戦略 q_u が**連続的に安定な戦略**(Continuously Stable Strategy, CSS) であるとは, (1) ESS である, (2) 任意の q_v について $|q_u - q_v| < \varepsilon$ を満たすような $\varepsilon > 0$ が存在し, 任意の q_i について $|q_v - q_i| < \eta$ を満たすような $\eta > 0$ が存在し, 次の関係を満たすときをいう.

$$F(q_v, q_i) > F(q_i, q_i) \quad \text{if and only if} \quad |q_v - q_u| < |q_i - q_u|. \text{——}$$

(2) の条件を 収束安定性 (Convergence Stability, CS) と呼ぶこともある. 平衡点 q_i^* からずれているとき q_i^* より q_i^* に近い突然変異戦略が必ず侵入できる. したがって戦略は突然変異戦略の侵入と置換の繰り返しによって平衡点 q_i^* に近づく.

命題. $\hat{q}_i$ が ESS であるための必要条件は, 次の条件を満たすときである.

$$(*)\qquad \begin{aligned}&\text{(i)}\quad \frac{\partial}{\partial q_j}F(q_j,\hat{q}_i)\Big|_{q_j=\hat{q}_i}=0,\\ &\text{(ii)}\quad \frac{\partial^2}{\partial q_j^2}F(q_j,\hat{q}_i)\Big|_{q_j=\hat{q}_i}\leq 0.\text{ ——}\end{aligned}$$

証明 この条件は利得関数が極大であるための必要条件である. □

命題.

(i) ESS q_i が $q_i=q_j=\hat{q}_i$ において, CSS となる必要条件は, 次の条件を満たすときである.

$$(**)\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_j}+\frac{\partial^2 F}{\partial q_i^2}\leq 0.$$

(ii) ESS $\hat{q}_i$ が CSS であるための十分条件は, $(*)$, $(**)$ の等号を除いたものが成り立つことである. ——

証明 Eshel [3], Theorem 1 を参照されたい. □

よって ESS と CS の関係からを次のような表 1 に分類することができる.

場合分け	$(**)$	not $(**)$
$(*)$	(i) 漸近安定	(ii)Lyapunov 安定
not $(*)$	(iii)	(iv) 不安定

表 1

(i):到達可能で安定に維持される平衡である. (iv):不安定な平衡状態である. (ii): ESS だが CS ではない平衡状態は, もし最初からその平衡状態にあれば, 安定であるが, 最初にその平衡状態から少しでもずれていると, ますますずれる方向に突然変異体の侵入と置換が起きる. (iii): ESS でないが CS である平衡状態であり, 戦略の 2 極分化など興味深い現象が指摘されている.

3. Replicator 方程式

この節では進化ゲーム理論における Replicator 方程式を取り上げる. ESS は動学的なプロセスにおける安定した状態を直感的に定式化したものであった. この Replicator 方程式は動学的なプロセスを明示的に与えるものである. ここでは主に Weibull [23] の第 3, 4, 5 章に対応している.

3.1 導出

Nash 均衡には 2 つの解釈があったが, この Replicator 方程式にも複数の解釈の仕方が存在する. まず数理生物学でよく用いられている解釈から述べる. ここでは大人数の主体がおり, それらがランダムにマッチして, ゲームを行う状況を考える.

ここで t 期の戦略のシェアを $x_i(t)=\dfrac{p_i(t)}{P(t)}, i\in N$ と置く. ただし P をこのゲームに参加している全人口とする. p_i を戦略 i を採用している人の数である. また g_i を人口 $p_i(t)$ における成長率とする. そこで x_i の変動 : $x_i(t+\Delta t)=\dfrac{p_i(t+\Delta t)}{P(t+\Delta t)}$ を考える.

$$\begin{aligned}x_i(t+\Delta t)&=\frac{x_i(t+\Delta t)P(t+\Delta t)}{P(t+\Delta t)}=\frac{(1+g_i)x_i(t)P(t)}{P(t+\Delta t)}\\&=\Big[\frac{1+g_i}{1+\bar{g}}\Big]x_i(t),\ \ \bar{g}=\sum_{i=1}^{N}x_i g_i.\end{aligned}$$

次に $x_i(t)$ を両辺から引くと次が得られる.

$$\begin{aligned}x_i(t+\Delta t)-x_i(t)&=x_i(t)\Big[\frac{1+g_i}{1+\bar{g}}-1\Big]=x_i\Big[\frac{1+g_i-1-\bar{g}}{1+\bar{g}}\Big]\\&=x_i\Big[\frac{g_i-\bar{g}}{1+\bar{g}}\Big].\end{aligned}$$

ここで $\Delta t\to 0$ とすると, 次が得られる.

$$\dot{x}_i=x_i(g_i-\bar{g}).$$

これが Replicator 方程式と呼ばれているものである. これは戦略 i の利得が平均期待利得よりも高いならば, 各主体は模倣する (replicate) ことにより, 戦略 i を採用する人が多くなることを意味している. さらには戦略 i を採用している人が多ければ, 各主体は模倣する (replicate) ことにより, その戦略 i を採用されやすくなるという外部性も存在する. これ以外にも Replicator 方程式の導出法は存在する. 例えば数理生物学で使われる Lotka-Volterra 方程式から導出する方法も存在する.[3)]

またこの方程式において, 平衡点は Nash 均衡となり, ESS となるのは漸近安定な Nash 均衡の場合をいう.

3.2 2×2 対称 2 人ゲーム

ここでは対称 2 人ゲームを取り上げる. 対称 2 人ゲームとは, ゲームを行うプレイヤー同士の利得関数が等しい場合を言う. つまり $A=A^T$ の場合である.

一般的な利得関数は次のように置くことができる.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}.$$

各主体の戦略 2, 戦略 1 を採用した場合に得ることができる利得を基準化すると, 次が得られる.[4)]

---

3) $\frac{dp_i}{dt}=(r+u_i(x))p_i$ から Replicator 方程式を導出する. まず戦略のシェアを表す関係式 $p_i(t)=x_i(t)P(t)$ を時間 t によって微分し, 先ほどの式に代入し, 式変形すると導出することができる.

4) 戦略 1 を採用している人の頻度を x_1 と置くと, Replicator 方程式は $\dot{x}_1=\{g_1-\bar{g}\}x_1=\{a_{11}x_1+a_{12}x_2-(x_1(a_{11}x_1+a_{12}x_2)+$

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} - a_{21} & 0 \\ 0 & a_{22} - a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}.$$

ただし $a_1 = a_{11} - a_{21}, a_2 = a_{22} - a_{12}$.

ここで a_1, a_2 の符号によって, 4 つの場合に場合分けすることができる．つまりここではこの方程式の安定性を調べていることになる.[5)]

I, IV a_1 と a_2 が反対の符号であるとき ESS は唯一である．$a_1 > 0, a_2 < 0$ の場合非ジレンマ型, $a_1 < 0, a_2 > 0$ の場合囚人のジレンマ型と呼ばれている.

II a_1, a_2 が共に正のとき, このゲームには ESS は 2 つ存在し, コーディネーション型と呼ばれる.

III a_1, a_2 が共に負のとき, このゲームには純粋戦略の ESS は存在しないが, 混合戦略の ESS が存在し, タカ=ハト型と呼ばれる.

証明 混合戦略の適応度は次のようになる.

$$u(x, y) = \lambda a_1 y_1 + (1 - \lambda) a_2 y_2 = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}$$

またすべての $y \neq x$ に対して, 次を得る.

$$u(y, y) = a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2$$

よってこれらから大小を比較すると,

$$u(x, y) - u(y, y) = -(a_1 + a_2)\Big(y_1 - \frac{a_2}{a_1 + a_2}\Big)^2 > 0$$

よって純粋戦略の ESS は存在せず, 混合戦略のみが ESS である．□

またこの場合の Replicator 方程式は次のように置くことができる．ここで各主体が戦略 1 を採用する頻度を x_1 とする.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \{a_1 x_1 - a_2 x_2\} x_1 x_2 \\ &= x_1(1 - x_1)\big\{(a_1 + a_2) x_1 - a_2\big\}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

$x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2))\big\} = x_1\{(1 - x_1)(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) - x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2)\} = x_1 x_2\{(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)\} = x_1 x_2\{(a_{11} - a_{21})x_1 - (a_{22} - a_{12})x_2\}$, と変形することができる．ここで $a_1 = a_{11} - a_{21}, a_2 = a_{22} - a_{12}$ と置けば, (3.9) と同値になる.

[5)] 対称 2 人ゲームの安定性は, Potential 関数を導入すれば容易に分かる.

$U(x_1) = \frac{a_1 + a_2}{4} x_1^4 - \frac{a_1 + 2a_2}{3} x_1^3 + \frac{a_2}{2} x_1^2 + C.$

ただし C は積分定数とする．この関数の形状によりどの戦略が安定であるのかが分かる.

3.3 2×2 非対称 2 人ゲーム

前節では, 対称 2 人ゲームを取り扱った．ここでは $A \neq A^T$ の非対称 2 人ゲームを取り上げる．(**5.2.2**)

ここでの各主体の利得は $u_1(x, y) = x \cdot Ay$, $u_2(x, y) = y \cdot B^T x$ と置く．よってここでの Replicator 方程式は対称 2 人ゲームと同様に次のように置くことができる．ただし x_h, y_h はそれぞれ戦略 h, k を採用する頻度を表している.

$$\dot{x}_h = [e^h \cdot Ay - x \cdot Ay] x_h, \dot{y}_k = [e^k \cdot B^T x - y \cdot B^T x] y_k.$$

ここで 2×2 のゲームにおいて, 各主体は次のような一般的な利得表に置かれているとする.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}.$$

ただし $a_1 = a_{11} - a_{21}$, $a_2 = a_{22} - a_{12}$, $b_1 = b_{11} - b_{12}$, $b_2 = b_{22} - b_{21}$.

このときの Replicator 方程式は次のように変形することができる．各プレイヤーが戦略 1 を採用する確率をそれぞれ x_1, y_1 とおく.

$$\dot{x}_1 = (a_1 y_1 - a_2 y_2) x_1 x_2, \;\; \dot{y}_1 = (b_1 x_1 - b_2 x_2) y_1 y_2,$$

ただし $x_2 = 1 - x_1, y_2 = 1 - y_1$.

非対称 2 人ゲームも対称 2 人ゲームと同様に, 特徴的なゲームの分類分けを行うことができる.

I, IV (非ジレンマ, 囚人のジレンマ) $\Leftrightarrow a_1 a_2 < 0$

II (コーディネーション型) $\Leftrightarrow a_1 > 0, a_2 > 0$,

III (タカ=ハト型) $\Leftrightarrow a_1 < 0, a_2 < 0$,

これ以外のものについては, Jacobi 行列を用いて安定性分析を行うのが一般的である.

4. 取り上げていない事項

非協力ゲームでは展開形ゲーム理論, 不完備情報ゲーム [18], 進化ゲーム理論においては, 確率的進化ゲーム理論 [24] などがある.

参考文献

[1] Axelrod, Robert (1984): *The Evolution of Cooperation*, Basic Books.(邦訳あり)

[2] Bishop,D.T. and Cannings,C.(1976): "Models of animal conflict," *Advances in Applied Probability*, Vol. **8**, No. 4, pp. 616-621.

[3] Eshel, Ilan (1983): "Evolutionary and continuous stability," *Journal of Theoretical Biology*, Vol. **103**, pp. 99-111.

[4] van Damme, Eric (1991) *Stability and Perfection of Nash Equilibria, 2nd*, Springer Verlag.

[5] Fudenberg, Drew and Levine, David K. (1998): *The Theory of Learning in Games*, The MIT Press.

[6] Haigh, J. (1975) : "Game theory and evolution," *Advances in Applied Probability*, Vol. **7**, No. 1, pp. 8-11.

[7] Hofbauer, Josef, Schuster, Peter and Sigmund, Karl (1979) : "A note on evolutionary stable strategies and game dynamics," *Journal of Theoretical Biology*, Volume **81**, Issue 3, pp. 609-612.

[8] Hofbauer, Josef and Sigmund, Karl (1998): *Evolutionary Games and Population Dynamics*, Cambridge University Press.(邦訳あり)

[9] 石原英樹, 金井雅之 (2002): 『進化的意思決定』, 朝倉書店.

[10] Kakutani, Shizuo (1941) : "A generalization of Brouwer's fixed point theorem," *Duke Mathematical Journal*, **8**, pp.457-459.

[11] Kuhn, Harold W. and Nasar, Sylvia (2001): *The Essential John Nash*, Princeton Univ Press.(邦訳あり)

[12] 丸山徹 (2002): 『経済数学』, 知泉書館.

[13] Maynard Smith, J. and Price, G. R. (1973): "The Logic of Animal Conflict," *Nature*, Vol. **246**, pp.15-18.

[14] Maynard Smith, John (1982): *Evolution and the Theory of Games*, Cambridge University Press.(邦訳あり)

[15] Myerson, Roger B. (1978): "Refinements of the Nash equilibrium concept," *International Journal of Game Theory*, Volume **7**, Number 2, pp. 73-80.

[16] 岡田章 (1996): 『ゲーム理論』, 有斐閣.

[17] 大浦宏邦 (2008): 『社会科学者のための進化ゲーム理論ー基礎から応用まで』, 勁草書房.

[18] Osborne, M.J. and Rubinstein, A. (1994): *Course in Game Theory*, MIT Press.

[19] Samuelson, Larry (1997): *Evolutionary Games and Equilibrium Selection*, MIT Press.

[20] Selten, Reinhard (1975): "Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games," *International Journal of Game Theory*, Vol.**4**, pp.25-55.

[21] Swinkels, Jeroen M. (1992) : "Evolutionary stability with equilibrium entrants," *Journal of Economic Theory*, Volume **57**, Issue 2, pp. 306-332.

[22] Vega-Redondo , Fernando (1997): *Evolution, Games and Economic Behaviour*, Oxford University Press.

[23] Weibull, Jorgen W. (1995): *Evolutionary Game Theory*, The MIT Press.(邦訳あり)

[24] Young, H.Peyton (1998): *Individual Strategy and Social Structure*, Princeton University Press.