

進化ゲーム理論入門 1-2-3 – Weibull(1995) を読む –

Mitsuru KIKKAWA

(Department of Science and
Technology, Meiji University)

THIS FILE IS AVAILABLE AT

<http://kikkawa.cyber-ninja.jp/>



本報告

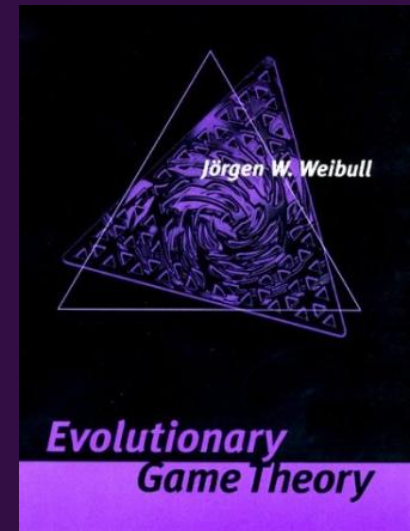
- Weibull (1995) を用いて、進化ゲーム理論の基本的な事項を3回で振り返ること。

(ただし証明の詳細は述べることができない。)

1回目 非協力ゲーム理論

2回目 均衡概念

3回目 Replicator方程式



前提知識: トポロジー(位相数学)の基礎

対象: ゲーム理論を専攻している学部上級～修士課程、ゲーム理論をある程度知っている人。

進め方: 配布資料 [\[HP\]](#)



ゲーム理論とは？

- 複数の主体が存在し、お互いの意思決定が相互に作用する状況を研究する学問。
- 例えば、主体1と2が次のような相互依存関係(利得表、数字は効用＝満足度)に置かれているとする。ここで各主体はどちらの戦略(S1, S2)を選ぶことが良いのか？この答えがNash均衡。これを考えるのが、非協力ゲーム理論。

主体 2

主体 1

	S1	S2
S1	1,2	3,4
S2	5,6	7,8

利得表

進化ゲーム理論：
Nash均衡への安定性を考察。



1. 非協力ゲーム理論 (NONCOOPERATIVE GAME THEORY)



1. 1. 準備：戦略形ゲーム、混合拡大



戦略形ゲーム

定義: 戦略形(strategic form) n 人ゲームとは次の要素の組によって定義される。

$$(1.1) \quad G = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{f_i\}_{i \in N}).$$

ここで, (i) $N = \{1, 2, \dots, n\}$ はプレイヤーの集合, (ii) はプレイヤー i の選択可能な行動あるいは戦略の集合、また全員の手は戦略セット $\vec{S} = S_1, \dots, S_n$ と表記する. (iii) f_i は直積集合 $\vec{S} = S_1 \times \dots \times S_n$ から実数への可測関数であり、プレイヤー i の利得関数を表す。



ASSUMPTIONS

仮定: 戦略 $q_i, i=1, \dots, n$ は独立 (independent) であるとする。

仮定: $\forall i, S_i$ は可分完備距離空間である。

仮定: $\forall i, f_i : \vec{S} \rightarrow \mathcal{R}$ は有界連続であり、線型関数である。

仮定: プレイヤーの目的は自己の利得最大化である。

仮定: 共有知識 (common knowledge): プレイヤー全員は自分に関してはもちろん、プレイヤー全員の利得関数を知っている。



混合拡大

定義: 戦略形 n 人ゲーム G の混合拡大(mixed extension)とは次の要素の組によって定義される。

$$(1.2) \quad G^* = (N, \{Q_i\}_{i \in N}, \{F_i\}_{i \in N}).$$

ここで, (i) $N = \{1, 2, \dots, n\}$ はプレイヤーの集合, (ii) Q_i は S_i 上の確率分布の全体であり、 S_i 上の確率分布 q_i をプレイヤー i の混合戦略(mixed strategy)といい、確率変数を表している。また確率ベクトル $\vec{q} = q_1, \dots, q_n$ と表記する。 (iii) F_i は直積集合

$\vec{Q} = Q_1 \times \dots \times Q_n$ 上の実数値関数であり、次のように定義される。

$$(1.3) \quad F_i(\vec{q}) = \int_{\vec{Q}} f_i(\vec{s}) d\mu(\vec{s}),$$

ここで μ は $\vec{q}$ の分布である。また $F_i(\vec{q})$ をプレイヤー i の期待利得(expected payoff function)という。また期待利得関数のセットを $\vec{F} = F_1, \dots, F_n$ と表記する。



1. 2. 準備：支配、最適応答



弱支配、支配

定義1.1:

$y_i \in \Delta_i$ が $x_i \in \Delta_i$ を弱支配する (weakly dominate) とは, すべての $z \in \Theta$ について $u_i(y_i, z_{-i}) \geq u_i(x_i, z_{-i})$, かつ, ある $z \in \Theta$ については狭義の不等号が成り立つときである. ある戦略 x_i が支配されない (undominated) 戦略であるとは, このような戦略 y_i が存在しないときをいう.

定義 1.2:

$y_i \in \Delta_i$ が $x_i \in \Delta_i$ を強支配する (strict dominate) とは, すべての $z \in \Theta$ について $u_i(y_i, z_{-i}) > u_i(x_i, z_{-i})$ となるときをいう.

実現可能集合

定義: ゲーム $G^* = (N, \{Q_i\}_{i \in N}, \{F_i\}_{i \in N})$ の実現可能集合(feasible set) U は、次のように定義される。

$$U = \left\{ \vec{F}(\vec{q}) \mid \vec{q} \in \vec{Q} \right\}$$

注意: 実現可能集合 U は、期待利得関数 $\vec{F}$ の連続性より、可分完備距離空間の有界な閉集合(コンパクト集合)である。



最適応答

定義: プレイヤー*i* の戦略 $q_i \in Q_i$ が他の $n-1$ 人のプレイヤーの戦略の組 $q_{-i} = (q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_n)$ に対する**最適応答**(best response) であるとは、

$$(1.4) \quad F_i(q_i, q_{-i}) = \max_{r_i \in Q_i} F_i(r_i, q_{-i})$$

であるときをいう. 戦略の組 q_{-i} に対するプレイヤー*i* の最適応答の全体を、 $B_i(q_{-i})$ とおく。

注意: 写像 $B_i(q_{-i})$ は直積集合 $Q_1 \times \dots \times Q_{i-1} \times Q_{i+1} \times \dots \times Q_n$ から集合 Q_i への点対集合写像となり、プレイヤー*i* の**最適応答対応** (best response correspondence) と呼ばれる。



1. 3. NASH均衡

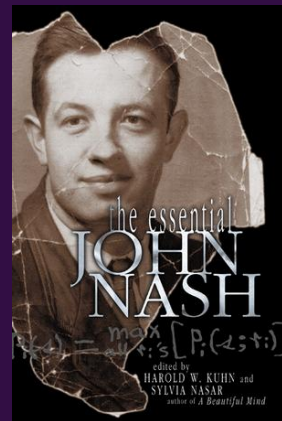


Nash 均衡

定義: 戦略形 n 人ゲーム G^* において、プレイヤーの戦略の組 $\vec{q}^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$ が Nash 均衡であるとは、すべてのプレイヤー i ($=1, \dots, n$) に対して戦略 q_i^* が他のプレイヤーの戦略の組 q_{-i}^* に対する最適応答であるときをいう。

Nash 均衡の解釈:

- 1) 合理性
- 2) Mass-Action



例

- **Prisoner's Dilemma (囚人のジレンマ) Game** . . .
Environmental Problem (環境問題), Cournot Duopoly(複占市場), Public Goods Game (公共財支出)

		player 2	
		C	D
player1	C	2年, 2年	7年, 無罪
	D	無罪, 7年	5年, 5年

N.E. : (D,D)



- **Coordination Game** ・ ・ ・ Standardize(規格統一)

		player 2	
		S1	S2
player1	S1	+, +	0, 0
	S2	0, 0	+, +

N.E. : (S1,S1), (S2,S2)

- **Hawk-Dove Game** ・ ・ ・ Struggle between animals (生物種における闘争)

		player 2	
		Hawk	Dove
player1	Hawk	$V-C/2, V-C/2$	$V, 0$
	Dove	$0, V$	$V/2, V/2$

N.E. : Mixed Strategy

$C > V$



定理

定理: ゲーム G^* において混合戦略の組

$\vec{q}^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$ が Nash 均衡であるための必要十分条件は次が成り立つことである。

$$(1.5) \quad \vec{q}^* \in B(q^*)$$

証明 Nash均衡、最適応答の集合の定義から必要条件、十分条件は明らかである。



定理1.1

定理1.1: ゲーム G^* において、混合戦略の範囲で少なくとも1つNash 均衡が存在する。

証明 ゲームの最適応答反応 $B(q)$ が次の角谷の不動点定理の条件を満たすことを言えばよい.

(1) プレイヤー i の純粋戦略の数を m_i とすると, プレイヤー i の混合戦略の集合 Q_i は m_i 次元 Euclid空間の (m_i-1) 次元単体であり、コンパクトな凸部分集合である。したがって、直積空間 $Q=Q_1 \times \dots \times Q_n$ も $m=m_1+\dots+m_n$ 次元Euclid空間のコンパクトな凸部分集合となる。



(2) 関数 F は連続であり、線形関数であるので、最適応答の集合 $B_i(q_{-i})$ は Q_i の非空な凸部分集合となる。よってその直積 $B(q)=B_1(q_{-1}) \times \dots \times B_n(q_{-n})$ も Q の非空な凸部分集合である。

(3) 直積集合 $Q=Q_1 \times \dots \times Q_n$ 内の2つの点列

$$\left\{ q^v = (q_1^v, \dots, q_n^v) \right\}_{v=1}^{\infty}$$

と

$$\left\{ \bar{q}^v = (\bar{q}_1^v, \dots, \bar{q}_n^v) \right\}_{v=1}^{\infty}$$

に対して,

$$\bar{q}^v \in B(q^v), v = 1, 2, \dots$$

$$q^v \rightarrow q^0, \bar{q}^v \rightarrow \bar{q}^0 (v \rightarrow \infty)$$

とする。



このとき, ゲームの最適応答対応 $B(\cdot)$ の定義より,
すべてのプレイヤー i ($=1, \dots, n$) の任意の混合戦略 t_i
 $\in Q_i$ に対して,

$$F_i(\bar{q}_i^v, q_{-i}^v) \geq F_i(t_i, q_{-i}^v), v = 1, 2, \dots$$

が成立する. この式で $v \rightarrow \infty$ とすると, 期待利得関数
 $F_i(q_i, q_{-i})$ の連続性より

$$F_i(\bar{q}_i^0, q_{-i}^0) \geq F_i(t_i, q_{-i}^0)$$

が成り立つ. t_i は Q_i の任意の元だから,

$\bar{q}_i^0 \in B_i(q_{-i}^0) (i = 1, \dots, n)$ である. ゆえに

$\bar{q}^0 \in B(q^0)$ である. (証 終)





定理(Kakutani's fixed point Theory)

定理: S を可分完備距離空間の非空, コンパクト, 凸集合とし, $F(\cdot)$ を S から S への点対集合写像で、次の2つの条件を満たすとする。

(i) すべての $x \in S$ に対して $F(x)$ は S の非空な凸部分集合である。

(ii) S 内の任意の点列 $\{x_v\}_{v=1}^{\infty}$ と $\{y_v\}_{v=1}^{\infty}$ に対して、

$y_v \in F(x_v)$, $v = 1, 2, \dots$, $x_v \rightarrow x_0$, $y_v \rightarrow y_0$ ($v \rightarrow \infty$) ならば、 $y_0 \in F(x_0)$ である。

このとき、 $x^* \in F(x^*)$ となる写像 $F(\cdot)$ の不動点 x^* が少なくとも1つ存在する。

1. 4. NASH均衡の精緻化



完全(perfect), Selten (1975)

定義 1.4: $x \in \Theta^{\text{NE}}$ が完全 (perfect) であるとは、摂動ゲームのある列 $\{G(\mu^t)\}_{\{\mu^t \rightarrow 0\}}$ に対して、 $x^t \rightarrow x$ となるプロファイル $x^t \in \Theta^{\text{NE}}(\mu^t)$ が存在するときをいう。

命題 1.3: 任意の(有限)ゲームに対し、 $\Theta^{\text{PE}} \neq \emptyset$.

命題 1.4: 任意の $x \in \Theta^{\text{PE}}$ は支配されない。2人ゲームでは、 $x \in \Theta^{\text{NE}}$ が支配されないならば、 $x \in \Theta^{\text{PE}}$ 。



プロパー (proper), Myerson (1978)

- ある $\varepsilon > 0$ を与えたとき, 戦略プロファイル $y \in \text{int}(\Theta)$ が ε -プロパー (ε -proper) であるとは,

$$(1.27) \quad u_i(e^h_i, y_{-i}) < u_i(e^k_i, y_{-i}) \rightarrow y_{ih} \leq \varepsilon y_{ik}.$$

が成り立つときをいう.

定義 1.5:

$x \in \Theta^{\text{NE}}$ がプロパー (proper) であるとは, ある列 $\varepsilon^t \rightarrow 0$ に対して, $y(\varepsilon^t) \rightarrow x$ が存在するときをいう.

2. 進化的安定性基準



2. 1. 進化的安定戰略



進化的に安定な戦略 (ESS)

定義2.1 : $x \in \Delta$ が進化的に安定な戦略 (Evolutionary Stable Strategy, ESS) であるとは, どのような戦略 $y \neq x$ に対しても, ある $\bar{\varepsilon}_y \in (0,1)$ が存在し, すべての $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}_y)$ について次の不等式が成り立つことをいう.

$$(2.1) \quad u[x, \varepsilon y + (1-\varepsilon)x] > u[y, \varepsilon y + (1-\varepsilon)x].$$



命題2.1 (Bishop and Cannings (1976))

命題2.1 :

進化的安定な戦略は以下の条件と同値である.

$$(2.3) \quad u(y, x) \leq u(x, x), \quad \forall y,$$

$$(2.4) \quad u(y, x) = u(y, y) \Rightarrow u(y, y) < u(x, y), \quad \forall y \neq x.$$

Proof. 効用関数の線形性を利用。



ESS集合の構造 (命題, 系)

命題2.2: $x \in \Delta^{\text{ESS}}$ であり, かつある戦略 $y \neq x$ に対して $C(y) \subset C(x)$ ならば, $y \notin \Delta^{\text{NE}}$.

系2.2.1: 集合 $\Delta^{\text{ESS}} \subset \Delta$ は有限である. もし $x \in \Delta^{\text{ESS}} \cap \text{int}(\Delta)$ ならば, $\Delta^{\text{ESS}} = \{x\}$.



ESSと非協力の解概念との関連

命題2.3: $x \in \Delta$ が弱支配されているならば, $x \notin \Delta^{\text{ESS}}$.

系2.3.1: $x \in \Delta^{\text{ESS}}$ ならば、 $(x, x) \in \Theta^{\text{PE}}$.

命題2.4 : $x \in \Delta^{\text{ESS}}$ ならば、 $(x, x) \in \Theta^{\text{NE}}$ はプロパー均衡である。



2. 2. ESSの特徴づけ



一様侵入障壁, Hofbauer, et.al (1979)

定義2.2: $x \in \Delta$ が一様侵入障壁(uniform invasion barrier)をもつとは, 全ての戦略 $y \neq x$ とあらゆる $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ に対して, 不等式(2.1)が成り立つようなある $\bar{\varepsilon} \in (0, 1)$ が存在することをいう.

命題2.5: $x \in \Delta^{\text{ESS}}$ であるための必要十分条件は, x が一様侵入障壁をもつことである.



局所的優越

定義2.3: $x \in \Delta$ が局所的優越(locally superior)であるとは, それがある近傍 U をもち, U の中のすべての $y \neq x$ に対し $u(x,y) > u(y,y)$ が成り立つことをいう.

命題2.6: $x \in \Delta^{\text{ESS}}$ であるための必要十分条件は, x が局所的優越となることである.



中立安定, Maynard Smith (1982)

定義2.4: $x \in \Delta$ が中立安定(neutrally stable, NSS)であるとは、各戦略 $y \in \Delta$ に対して、ある $\bar{\varepsilon}_y \in (0,1)$ が存在し、すべての $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}_y)$ に対して次の不等式が成り立つことをいう。

$$(2.8) \quad u[x, \varepsilon y + (1-\varepsilon)x] \geq u[y, \varepsilon y + (1-\varepsilon)x].$$

命題2.7: 任意の $x \in \Delta$ に対して、次の3つの条件は、同値である。

- a. $x \in \Delta^{\text{NSS}}$
- b. x は一様弱侵入障壁を持つ。
- c. x は局所的弱障壁である。



REE, Swinkels (1992)

定義2.5: 戦略 $x \in \Delta$ が均衡侵入に対して頑健である(robust against equilibrium entrants, REE)とは、ある $\bar{\varepsilon}_y \in (0,1)$ が存在し、全ての $y \neq x$ と $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ に対して、次の条件 (2.12) が成立することをいう。

$$(2.12) \quad y \notin \beta^*[\varepsilon y + (1-\varepsilon)x].$$

命題2.8: $\Delta^{\text{ESS}} \subset \Delta^{\text{REE}} \subset \Delta^{\text{NE}}$.

命題2.9 : $x \in \Delta$ が均衡侵入に対して頑健であるならば、 $(x,x) \in \Theta^{\text{NE}}$ はプロパーである。



2. 3. 適応力学系との関連



仮定

仮定: 純粋戦略は無限集合であり、その実現可能集合 U は有界閉集合 (コンパクト) であるとする。

仮定: 利得関数 $F(q_i, q_j)$ は q_i, q_j 共に2回微分可能である。



連続的に安定な戦略, Eshel(1983)

定義: 戦略 q_u が連続的に安定な戦略

(Continuously Stable Strategy, CSS) であるとは,

(1) ESS である. (2) 任意の q_v について $|q_u - q_v| < \varepsilon$ を満たすような $\varepsilon > 0$ が存在し、任意の q_i について $|q_u - q_i| < \eta$ を満たすような $\eta < 0$ が存在し、次の関係を満たすときをいう。

$$F(q_v, q_i) > F(q_i, q_i)$$

if and only if $|q_v - q_u| < |q_i - q_u|$.



命題, Eshel(1983)

命題: $\hat{q}_i$ がESS であるための必要条件は、次の条件を満たすときである。

$$(i) \quad \left. \frac{\partial}{\partial q_j} F(q_j, \hat{q}_i) \right|_{q_j = \hat{q}_i} = 0,$$

$$(*) \quad (ii) \quad \left. \frac{\partial^2}{\partial q_j^2} F(q_j, \hat{q}_i) \right|_{q_j = \hat{q}_i} \leq 0.$$

証明: この条件は利得関数が極大であるための必要条件である。



命題, Eshel (1983)

命題: (i) ESS q_i が $q_i = q_j = \hat{q}_i$ において、CSS となる必要条件是次の条件を満たすときである。

(**)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_j} + \frac{\partial^2 F}{\partial q_i^2} \leq 0.$$

(ii) ESS $\hat{q}_i$ がCSS であるための十分条件は, (*), (**) の等号を除いたものが成り立つことである。



ESS と CS の関係

	(**)	Not (**)
(*)	(i) 漸近安定	(ii) Lyapunov 安定
Not (*)	(iii)	(iv) 漸近不安定

(i) 漸近安定な平衡点

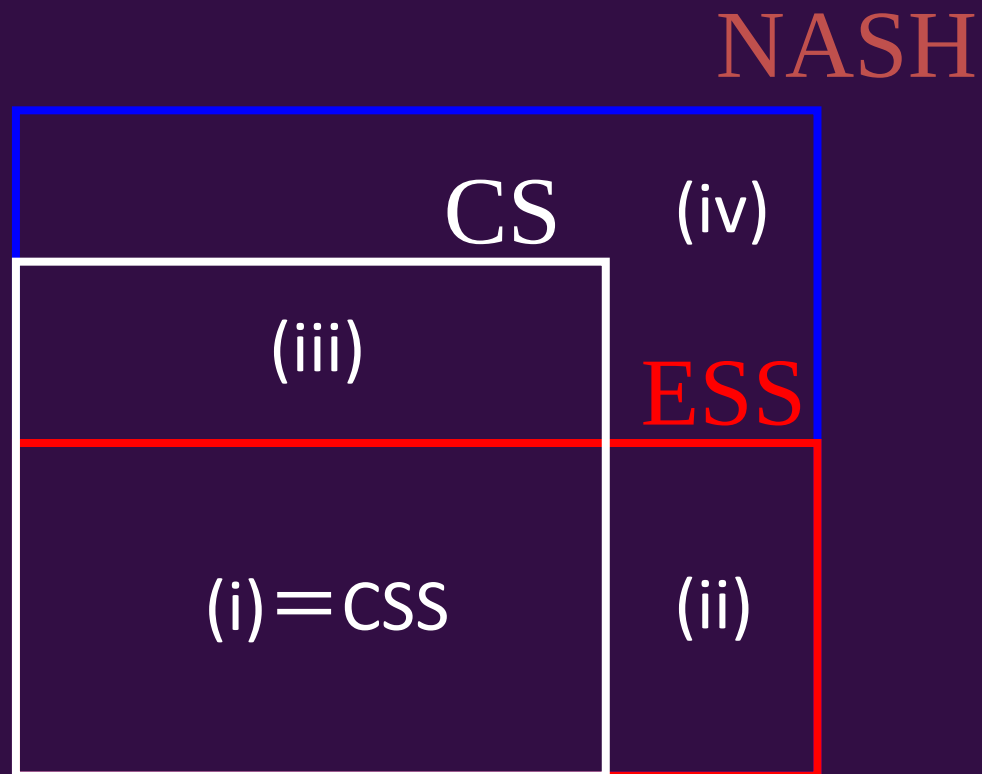
(ii) Lyapunov安定

(iii) ESSでないがCS (戦略の2極分化など興味深い)

(iv) 不安定



NASH , ESS, CS



3. REPLICATOR方程式



3. 1. 導出



Replicator方程式の導出

- ここで t 期の戦略のシェアを $x_i(t)=p_i(t)/P(t)$, $i \in N$.
ただし P をこのゲームに参加している全人口、 p_i
を戦略 i を採用している人の数、 g_i を人口 $p_i(t)$ に
おける成長率.

- x_i の変動:
$$x_i(t + \Delta t) = \frac{p_i(t + \Delta t)}{P(t + \Delta t)}$$

$$x_i(t + \Delta t) = \frac{x_i(t + \Delta t)P(t + \Delta t)}{P(t + \Delta t)} = \frac{(1 + g_i)x_i(t)P(t)}{P(t + \Delta t)}$$

$$= \left[\frac{1 + g_i}{1 + \bar{g}} \right] x_i(t), \quad \bar{g} = \sum_{i=1}^N x_i g_i.$$



- $x_i(t)$ を両辺から引くと次が得られる。

$$\begin{aligned} x_i(t + \Delta t) - x_i(t) &= x_i(t) \left[\frac{1 + g_i}{1 + \bar{g}} - 1 \right] = x_i \left[\frac{1 + g_i - 1 - \bar{g}}{1 + \bar{g}} \right] \\ &= x_i \left[\frac{g_i - \bar{g}}{1 + \bar{g}} \right]. \end{aligned}$$

- ここで $\Delta t \rightarrow 0$ とすると, 次が得られる。

$$\dot{x} = x_i (g_i - \bar{g}).$$

これがReplicator方程式。



3. 2., 3.3 2×2 対称2人ゲーム, 非対称2人ゲーム



対称2人ゲームと非対称2人ゲーム

→主体1と2の利得構造が等しいかどうか。

		Player 2	
		S1	S2
Player 1	S1	A,A	C,B
	S2	B,C	D,D

対称2人ゲーム

		Player 2	
		S1	S2
Player 1	S1	A,E	C,G
	S2	B,F	D,H

非対称2人ゲーム

Replicator 方程式: 1本

$$A = A^T$$

2本

$$A \neq A^T$$



各プレイヤーの戦略が2つの場合

★対称2人ゲーム(戦略が2つの場合)

$$\bullet$$
$$x = x(1-x)\{b - (a+b)x\}$$

主な分類:

- (I) 非ジレンマ型: $a > 0, b < 0$, ESS :1つ
- (II) 囚人のジレンマ: $a < 0, b > 0$, ESS :1つ
- (III) コーディネーション型: $a > 0, b > 0$, ESS 2つ
- (IV) タカ=ハト型: $a < 0, b < 0$, ESS 1つ(混合戦略)

	戦略1	戦略2
戦略1	a,a	0,0
戦略2	0,0	b,b

利得表

★非対称2人ゲーム(戦略が2つの場合)

$$\bullet$$
$$y = y(1-y)\{a - (a+c)x\},$$
$$\bullet$$
$$x = x(1-x)\{d - (b+d)y\}.$$

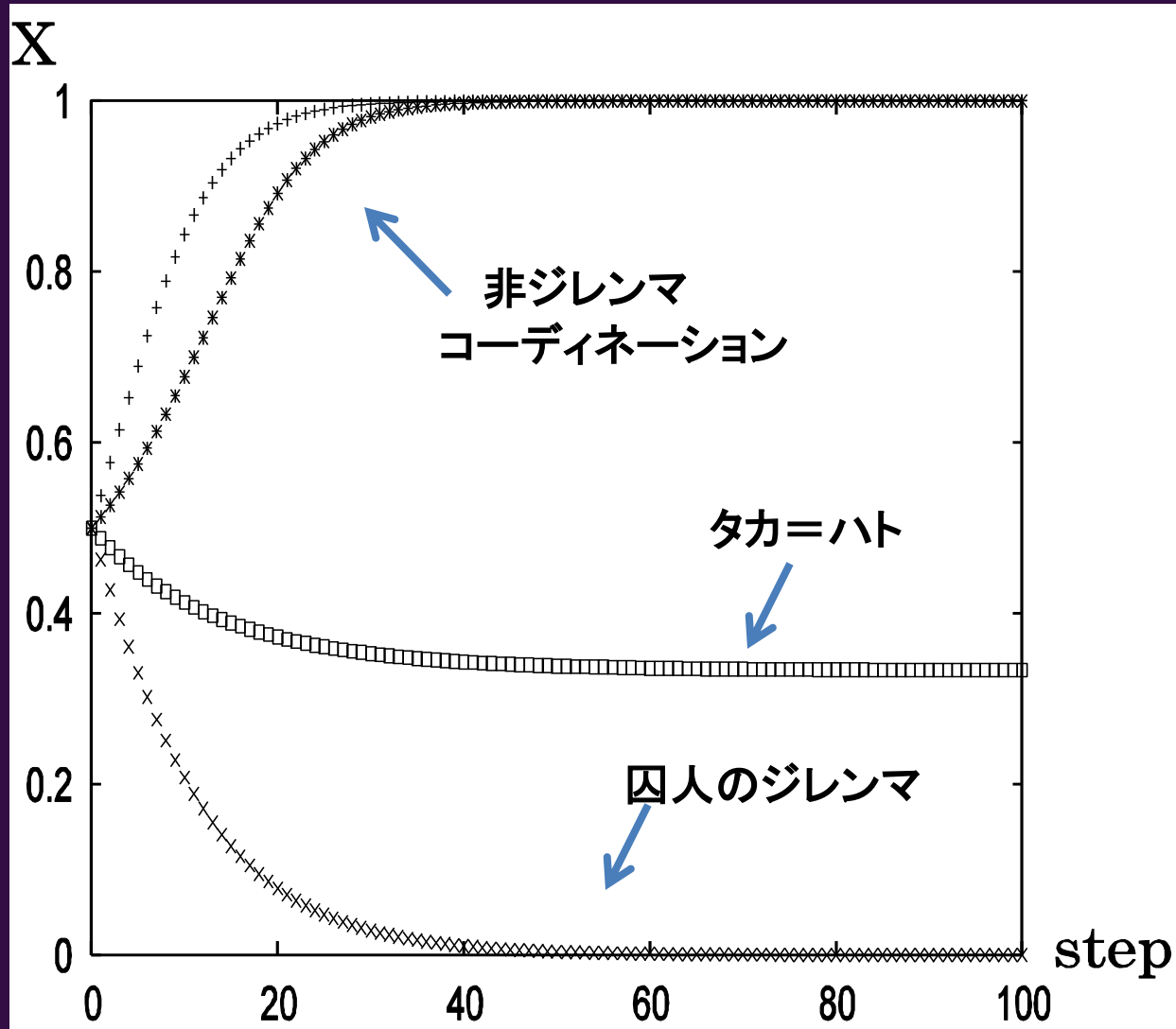
y をプレイヤー1が戦略1を取る確率、

x をプレイヤー2が戦略2を取る確率

	戦略1	戦略2
戦略1	a,b	0,0
戦略2	0,0	c,d



対称2人ゲーム



非対称2人ゲーム：最後通牒ゲーム

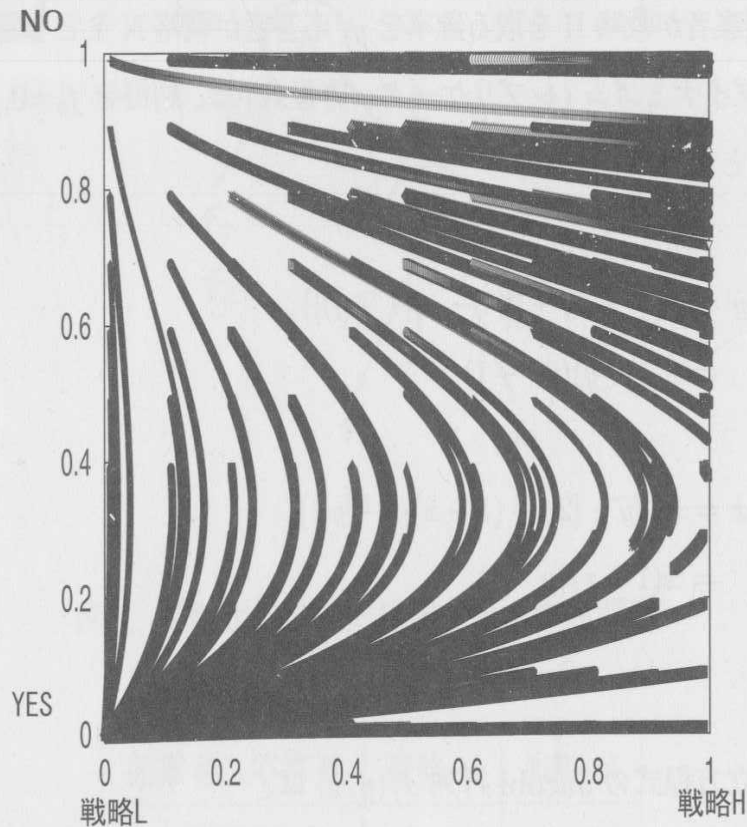


図 2: ノイズがない場合

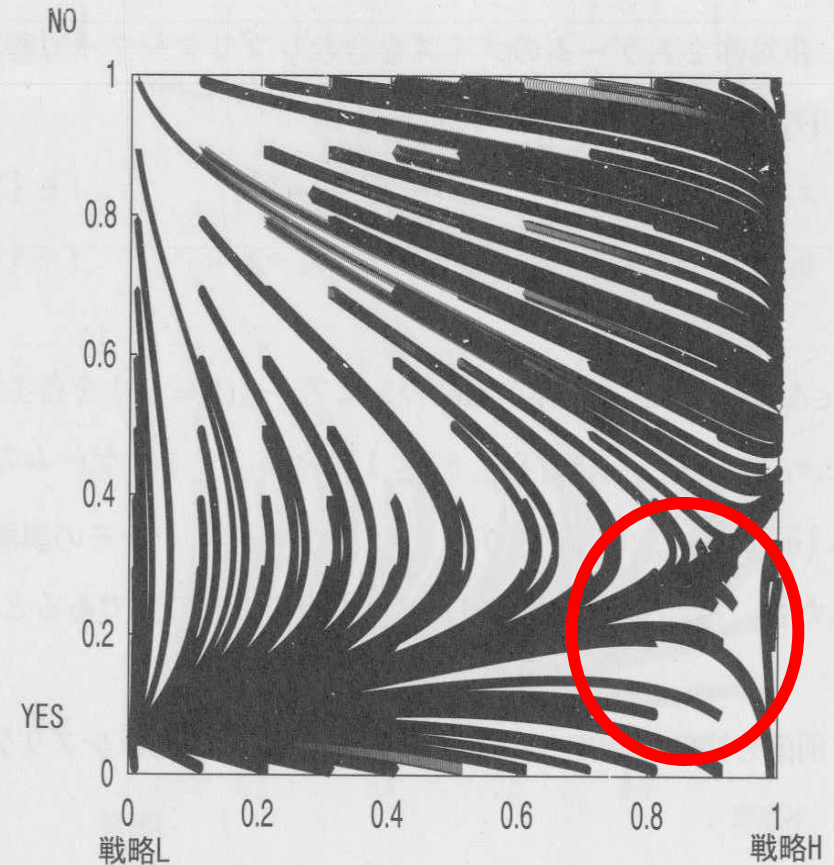


図 3: ノイズがある場合 ($\delta_I = 0.01$, $\delta_{II} = 0.1$).

No Noise

Noise

吉川満「非対称2人ゲームの大域的な分析とノイズの役割」『関西学院 経済学研究』第36号 (2005), pp. 21-38. [\[HP\]](#)



4. 取り扱わなかったこと、補足



- 1. 展開形ゲーム、不完備情報ゲーム
- 2. 確率的進化ゲーム理論
- 3. 最近の研究内容



Thank You For Your Attention

Mitsuru KIKKAWA (mitsurukikkawa@hotmail.co.jp)

This File is available at

<http://kikkawa.cyber-ninja.jp/>

Next my talk: 5/20 @ Surugadai



Text Book

For Detail, See my Website([Bookguide](#) [Readinglist](#))

Classic:

- [1] Maynard Smith, John Evolution and the Theory of Games, Cambridge University Press, 1982/10. [日本語訳](#)
- [2] Axelrod, Robert The Evolution of Cooperation, Basic Books, 1984/03. [日本語訳](#)

Text Book:

- [1] Weibull, Jorgen W. Evolutionary Game Theory, MIT Press, 1995/08/14. [日本語訳](#)
- [2] Hofbauer, Josef and Sigmund, Karl Evolutionary Games and Population Dynamics, Cambridge University Press, 1998/07. [日本語訳](#)
- [3] Vega-Redondo, Fernando Evolution, Games and Economic Behaviour, Oxford University Press, 1997/01.
- [4] Samuelson, Larry Evolutionary Games and Equilibrium Selection (Mit Press Series on Economic Learning and Social Evolution, 1), MIT Press, 1997/04.

For Beginner :

- [1] 石原英樹, 金井雅之 進化的意思決定 (シリーズ意思決定の科学), 朝倉書店, 2002/04/05.
- [2] 大浦宏邦 社会科学者のための進化ゲーム理論ー基礎から応用まで, 書房, 2008/09/25.

