空間構造を持った進化ゲーム理論
Evolutionary Game Theory with Spatial Structure

Graduate School of Economics, Kwansei Gakuin Univeristy
D3 吉川　満
mitsurukikkawa@hotmail.co.jp

The 12th Annual Conference of the Japan Association for Evolutionary Economics (International University of Kagoshima): 2008/3/23: 1320-14:00

http://kikkawa.cyber-ninja.jp/index.htm
Mitsuru KIKKAWA'S WEB SITE からDownloadable

OUTLINE

１. Introduction（Motivation, Purpose）
２. Related Literatures and Review
３. Our Model
  3-1. Nearest neighbor（Ising TYPE）
  3-2. Random Matching（SK MODEL）
    Annealed System, Quenched System
４. Extension : Dynamics, Externality
５. Application : Simulation(Agent Based Model)
６. Summary

1. INTRODUCTION

The 11th Annual Conference of the JAEE (Kyoto University)

- 報告内容:「非対称2人ゲームにおける漸近安定な均衡の発生とその変化」
- 進化ゲーム理論にNoise(新規参入者)の導入することによって、局所安定な内点解が生成、それが外生変数によって変化するということを近可積分系の議論(Kolmogorov-Arnold-Moser's Theorem, Arnold Diffusion)を用いて証明した。
- →この議論を経済学(共有資源のゲーム、例:タクシーの参入規制の問題)に適用。
- +戦略が3つあるときの一般的な進化ゲーム理論の分析の困難さ

OUR CONTRIBUTIONS

- 格子(lattice) 上にいる主体がゲームを行っている。

 →統計力学によって、定式化を行った。

 →変数が1つ増えた。

- 「Phase Transition(相転移) 」を利用した、均衡の生成、その特徴づけ

 In detail, 統計力学で最も簡単なIsingモデル(nearest neighborhood)、SKモデル(random matching)を用いて、ゲームの定式化した。さらには動学化し、多重均衡の存在を示した。

→変数によって既存の進化ゲーム理論と一致し、しない場合が存在。

MOVITATION

- 様々な主体がいるモデル＝高次元系を分析したい。

→しかし、数千、数万の方程式を取り扱うことは無理。
安定性に限っては、Routh-Hurwitzの定理から4本以上となると分からないに等しい。

分布関数を用いて、高次元系を分析する

→Statistical mechanics

今までどのようにして様々な主体がいるゲームを分析してきたのか？

→平均のみを考え、低次元系へ。

Replicator方程式は、平均場との相互作用：その大小で、戦略の増減が決まる。

→こんなに単純でよいのか？仮に戦略が2つの場合であっても、複雑な状況があるのではないか？

2. RELATED LITERATURES and REVIEW

RELATED LITERATURES

- **Diederich and Opper(PRA,1989)、Tokita and Yasutomi (PRE,1999):** 進化ゲーム理論に統計力学を導入した。

→ Spin Glass で使われているSKモデルを直接応用し、定式化を行った。

→ そのため、物理学の仮定が課されており、不適ではないか？また既存の理論との対比が欠如し、分かりづらい。特にTokita and Yasutomi (1999)ではEuler法を使って、連続時間体系から離散時間体系へと変形している。確率変数もlog の形へ変形。多くの人が認める方法を用いていない。ただしシミュレーション結果は興味深いものとなっている。

RANDOM INTERACTION (SK MODEL) Diederich and Opper(1989)

- Replicator Eq.:

$$\frac{dx_\nu}{dt} = x_\nu(f_\nu - \overline{f}), \quad for \quad \nu = 1, \cdots, N.$$

- Fitness Function: $f = -H = \frac{1}{2}\sum_{\nu\mu} x_\nu c_{\nu\mu} x_\mu,$

where, $f_\nu = \frac{\partial f}{\partial x_\nu}, \quad c_{\nu\mu} = c_{\mu\nu} (\mu \neq \nu)$ This is a element of the Random Matrix , it is Gauss Distribution, Average is 0, Variance is 1/N.

以上の設定の下で、2つの戦略の分布を調べた。

We obtain the following Equations with Replica method under Quenched System.

$$u - v = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Delta}^{\infty} dz e^{-Z^2/2} (z + \Delta),$$

$$(u - v)^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Delta}^{\infty} dz e^{-Z^2/2} (z + \Delta)^2, \; where \quad \Delta = \sqrt{q}(u - 2v)$$

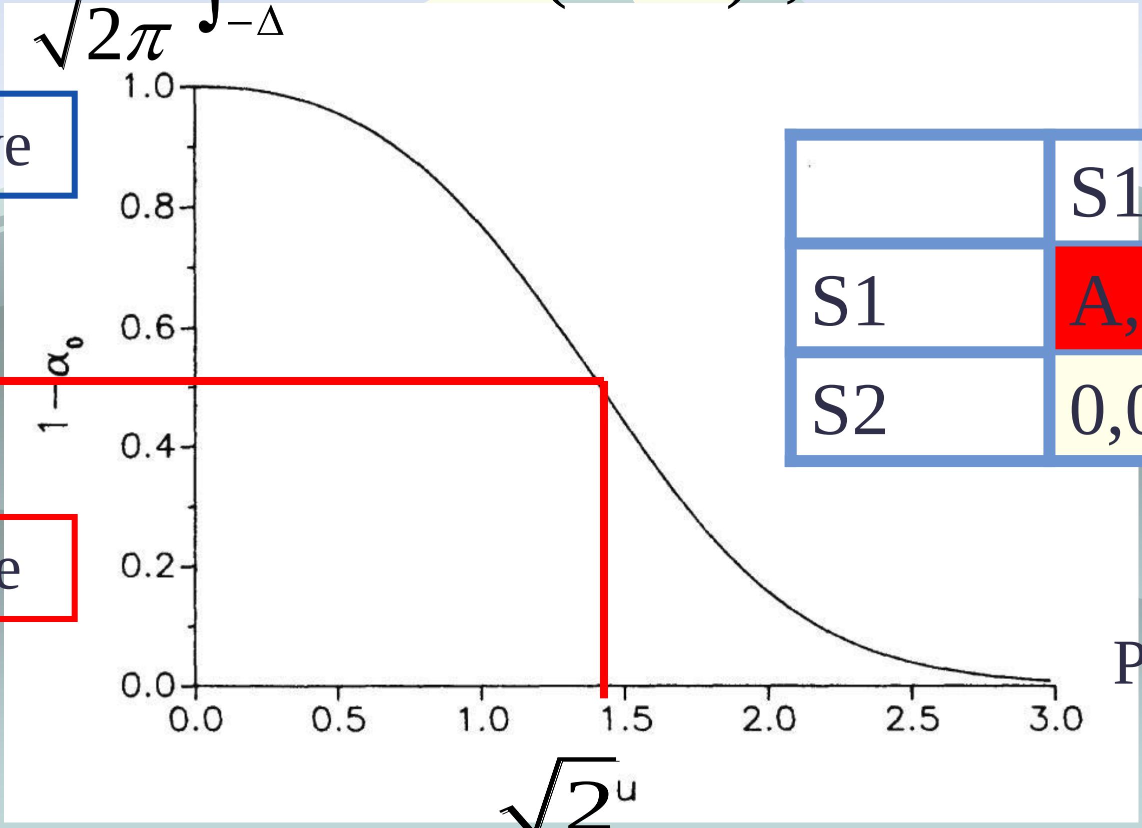
Competitive

↑↓、↓↑

0. 5

Cooperative

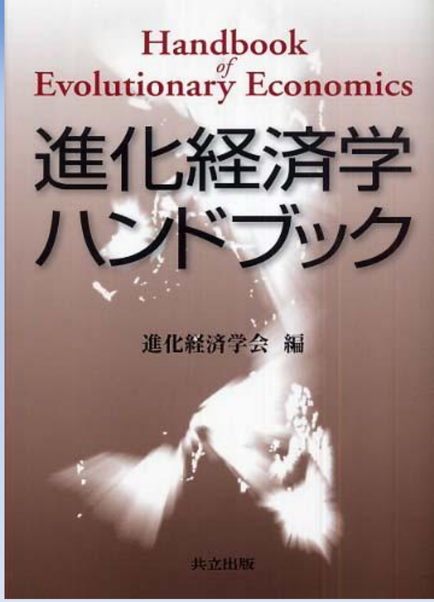
↑↑、↓↓



	S1	S2
S1	A,A	0,0
S2	0,0	B,B

Parameter u

進化経済学ハンドブック



- 時田恵一郎「ゼロサムゲーム力学系」、p281-285.

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = x_i \left(\sum_{j}^{N} a_{ij} x_j - \sum_{j,k}^{N} a_{ij} x_j x_k \right), \qquad a_{ij} = -a_{ji}$$

- EXAMPLE) i) 3戦略の場合：ジャンケンゲーム, ii) 短期の株式市場、iii) 生態学において、捕食･非捕食関係、iv) 集団遺伝子学における遺伝子変換.
- これらの先行研究はGAM Theory (**Gardner and Ashby(Nature, 1970),May(Nature ,1972)**) に触発されて研究された.
- d**x**/dt = A **x**　where A:Random Matrix, **x**: vector.

MATHEAMTICAL BIOLOGY

- 統計力学や格子モデルを使った空間構造のモデルは以前から研究されている。

例)

- Matsuda,*et al*.(1992), Harada and Iwasa(1994), Namakaru, *et al*. (1997) …..

→生物学の関心を、「出生、死亡」を当初から前提。

我々は戦略の変化のみに着目。均衡はどのようになっているのか。Minimalなもの。

EconoPhysics のモデルとしても

- Cont – Boucaud Model:

''Herd Behavior and Aggregate Fluctuations in Financial Markets,'' *Macroeconomics Dynamics*, Vol.**4** (2000), pp.315-323.

→詳細は**京都大学基礎物理学研究所2007年度後期研究会 経済物理学III** における報告内容を参照.

- 青山秀明、青木正明、吉川洋

「労働生産性：現象と理論」→超統計(SuperStatics, Beck and Cohen 2003 Physica A)を用いて、労働生産性のベキ分布を導出.

→これも経済物理学III における報告内容

WHAT IS ''GAME'' ?

相互関係にある2人の主体(Player 1, Player 2)がいるとする。

Player 1が戦略1をとり、Player 2 が戦略1をとったときに得られる Player 1 ' payoff is a , Player2's payoff b. このような状況のもとで、各主体はどのような戦略をとるのか？

→その解概念が**Nash Equilibrium**.

（ただしこのゲームは一度限りであるとする。）

Player 2

player1

	S1	S2
S1	a,b	0,0
S2	0,0	c,d

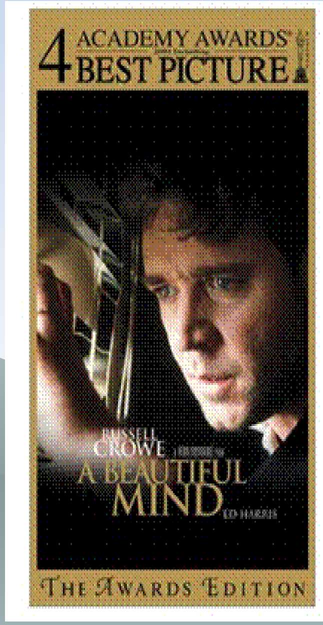
a,b,c,d の符号によってゲームの種類が決まる。

John Forbes Nash

Nash equilibrium

He shared the 1994 Nobel Prize in Economics with two other game theorists, Reinhard Selten and John Harsanyi.

His most famous work in pure mathematics was the **Nash embedding theorem**, which showed that any abstract Riemannian manifold can be isometrically realized as a submanifold of Euclidean space. He also made contributions to the theory of nonlinear parabolic partial differential equations.



A Beautiful Mind

Nash Equilibrium : Definition, Existence

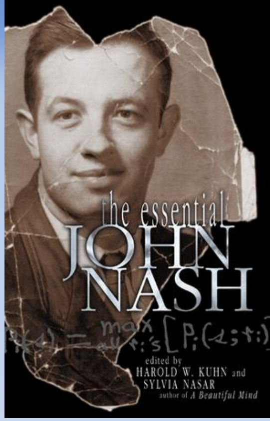
- **DEF.**: 戦略形 n 人ゲーム $G^* = \left(N, \{Q_i\}_{i\in N}, \{F_i\}_{i\in N}\right)$ において、プレイヤーの組 $\overrightarrow{q^*} = \left(q_1^*, \cdots, q_n^*\right)$ が **Nash均衡**であるとは、すべてのプレイヤーi (=1,…,n) に対して戦略 q_i^* が他のプレイヤーの戦略の組 q_{-i}^* に対する**最適応答**であるときをいう.
- **THEO.**: ゲームG*において、混合戦略の範囲で少なくとも1つNash 均衡が存在する。

PROOF. **Kakutani's fixed point theory**の条件を満たすことを言えばよい.

Interpretation of Nash Equilibrium (J.F.Nash's Ph D. Thesis)

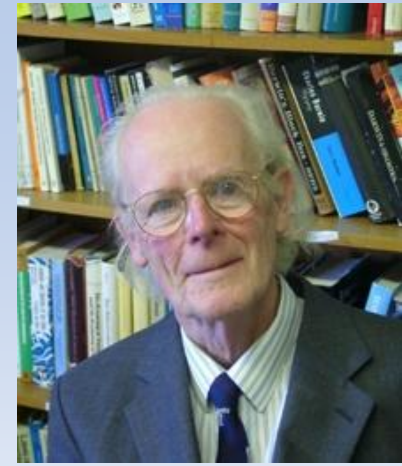
- 1. "**Rationality**" ･･･ the players are perceived as rational and they have complete information about the structure of the game, including all of the players' preferences regarding possible outcomes, where this information about each other's strategic alternatives and preferences, they can also compute each other's optimal choice of strategy for each set of expectations. If all of the players expect the same Nash equilibrium, then there are no incentives for anyone to change his strategy.
- 2. "**Statistical Populations**" ･･･ is useful in so-called evolutionary games. This type of game has also been developed in biology in order to understand how the principles of natural selection operate in strategic interaction within among species.(→ **Mass Action**)

(FROM Press Release – The Royal Swedish Academy of Sciences, 11 October 1994)



Nash has received a grant from the National Science Foundation to develop a new "**evolutionary**" solution concept for **cooperative games**.(From *the essential John Nash*)

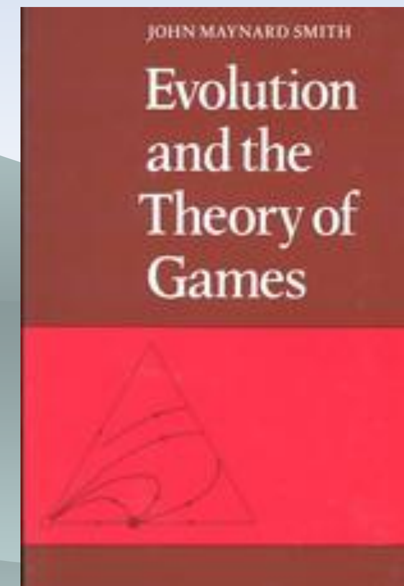
WHAT IS ‘’ EVOLUTIONARY GAME THOERY’’ ?



In 1973 Maynard Smith formalized a central concept in game theory called the evolutionary stable strategy (ESS), based on a verbal argument by G.R.Price. This area of research culminated in his 1982 book ***Evolution and the Theory of Games***. The Hawk-Dove game is arguably his single most influential game theoretical model.

POINT！: 利得(payoff)→適応度(fitness)

大きな集団において様々なプレイヤーが1対1でランダムに遭遇し、それぞれの戦略に基づき、次期にその戦略を採用する人が決まり、さらに次期において、・・・というプロセスが無限に繰り返す状況をいう。



REVIEW: Symmetric and Asymmetic Games

- 対称2人ゲームと非対称2人ゲームの違い

→利得表が異なる(戦略が2つの場合)

タイプ2

タイプ1

	S1	S2
S1	A,A	C,B
S2	B,C	D,D

Symmetric Two Person Game

タイプ2

タイプ1

	S1	S2
S1	A,E	C,G
S2	B,F	D,H

Asymmetric Two Person Game

Replicator Equation : 1本 2本

分析対象 :

Symmetric : 同一タイプによるゲーム

Asymmetric : 売り手と買い手など。

REVIEW: Replicator Equation

REPLICATOR EQ. $\dot{x}_i = x_i\left((Ax)_i - x\cdot Ax\right), i = 1, \cdots, n.$

ある戦略 i を取ったときの自分の利得が平均利得よりも大きい場合には, その戦略を取る確率が高くなる(学習・模倣)。またゲームをしている周りの主体がその戦略を取る確率が高いほどその増加率も高くなる(外部性の存在), ということを示している.

また利得が高ければ、その戦略をとる人が多いという仮定(利得の単調性)を仮定すれば、選択ダイナミクスから一意で導出される。

(注意) Potential Function で考えている.

特に戦略が2つのとき

$$\dot{x} = x(1-x)\{b-(a+b)x\} \quad \cdots(*)$$

主な分類:

(I) 非ジレンマ型: a > 0. b < 0, ESS :1つ
(II) 囚人のジレンマ : a < 0. b > 0, ESS :1つ
(III) コーディネーション型: a>0,b>0, ESS 2つ
(IV)タカ=ハト型: a<0,b < 0, ESS 1つ(混合戦略)

2

1

	戦略1	戦略2
戦略1	a,a	0,0
戦略2	0,0	b,b

利得表

REVIEW: Ising Model, Spin Glass

- **Ising model** ･･･相転移(異なる相へ移る)を記述する最も簡単なモデル。
- 金属に外場から磁化をかけ、ある臨界値(Curie温度)を超えると、磁石となる。
- 格子上にある(スピンの)状態 S_j : {-1, +1}, j=1,…,N
- 　N個状態が「+1 or -1」にすべて揃ったら「cooperative」、「-1, +1」の組ならば「competitive」、
- Hamiltonian (Energy)

$$H = -J \sum_{i,j} S_i S_j$$

- **Spin Glass** ･･･相互作用の符合が場所に一定ではないというミクロ的な特徴を持っている。

例） CuMn･･･銅(強磁性体にならない)に微量のマンガン(磁性原子)を混ぜ合わせて合金を作ると、マンガンの原子は銅の結晶格子中でランダムな位置を占め、ガラスの性質に似たスピン秩序を示すので、Spin Glass と呼ばれる。

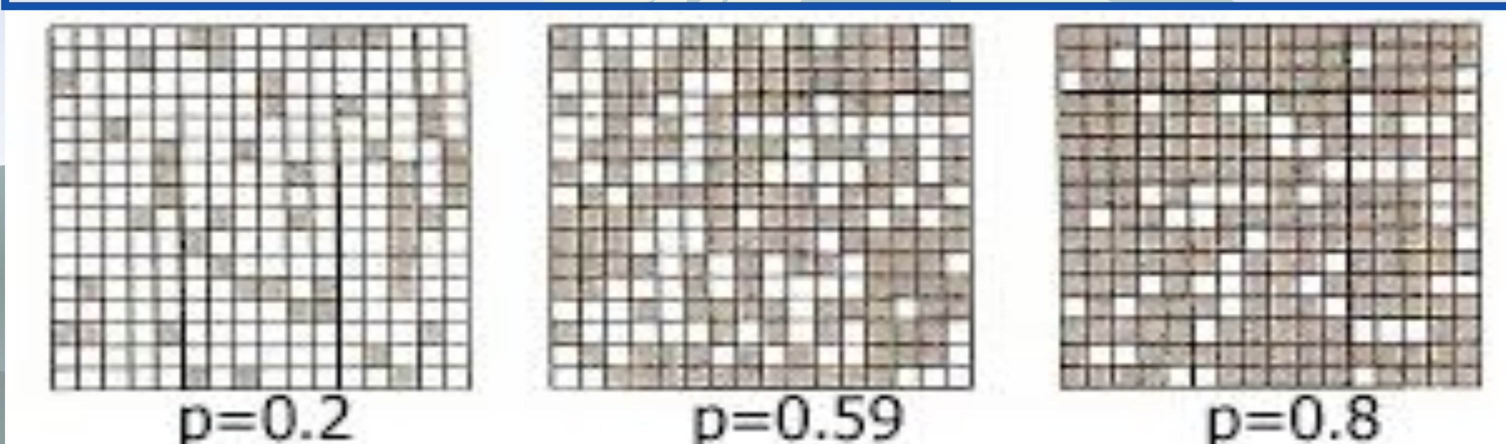
APPLICATION of Ising Model to Economics

- **Follmer (JME, 1974)**: 物々交換モデル。Isingモデルも使用。State:+1(所有),-1(なし)
- **Blume, L.E. (GEB, 1993, 1995)**: 格子上にいる主体のゲーム：特にコーディネーションゲーム(戦略の数が2つ、n個の場合)を分析.
- **吉田和男(2002)** Isingモデルを経済学における協同現象とIncentiveの問題のモデルとして取り扱っている。

など多数あり、経済学でも有効なモデル。

REVIEW: PERCOLATION

[d次元 Percolation]
d次元立方格子Z^2(d≧2) において, 各bondはそれぞれ独立にpで開き, 確率1-pで閉じている. いま,原点に水を注ぐとき, 開いたbondのみを通って水は流れるものとする. このとき, どのようなpの値に対して原点から無限にのびる水路が出現するか.



無限格子における閾値　p_c の定義

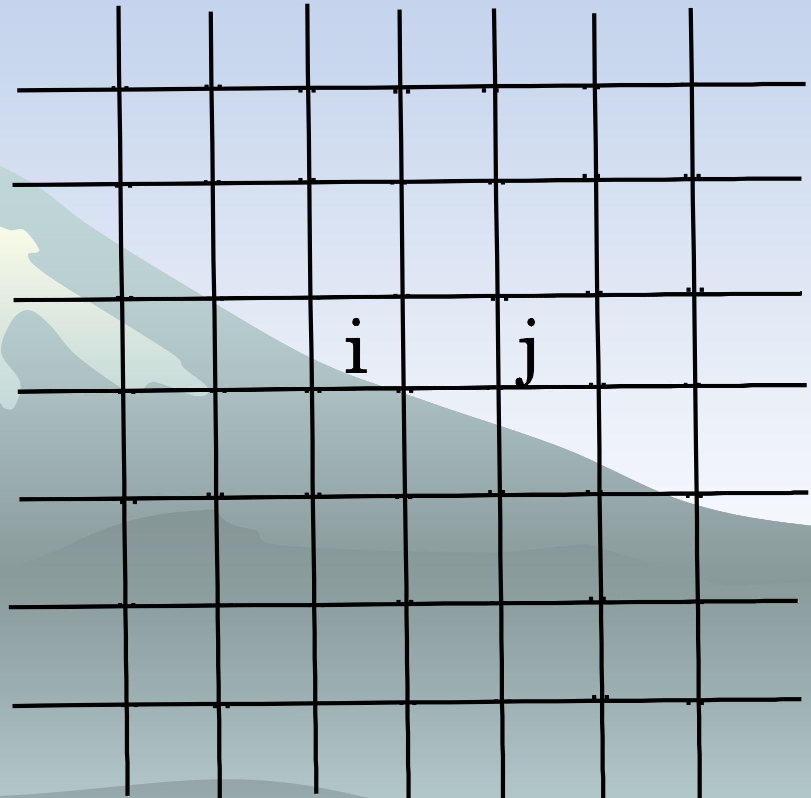
p<p_c 端から端まで連結したクラスターが存在せず、すべてのクラスターの大きさは有限である。

p≧p_c 1個の端から端まで連結したクラスターが存在する。

3. BASIC MODEL

MODEL :
Game: 2 types Strategy, 2 types Agent

- 多数の人がおり、2タイプの主体が1対1で出会い、2つの戦略を用いて、ゲームをする。
- In Sec.2, player i and j play a Game with Nearest Neighbor Interaction.
- In Sec.3, player i and j play a Game with Random Matching



LATTICE

EXAMPLE

	S1(1)	S2(2)
S1(1)	A,A	0,0
S2(2)	0,0	B,B

	S1(-1)	S2(+1)
S1(-1)	A,A	0,0
S2(+1)	0,0	B,B

where A,B > 0

Ising Model（Very Simple）

ASSUMPTION , PROPOSITON

ASSU.:　各主体は高い利得･適応度を得ることを望んでいる.

PROP.: 仮定のもとで主体xのある戦略{Si},i=1,…,Nを取り、ある利得fを得るというゲームの状況下に戦略の分布は

$$P(\{S_i\}) = Z^{-1}\exp(\gamma f)$$

となる。ただし{Si} は主体i の戦略, γは変数（例えば、正の情報）、f はある戦略{Si}を取ったときの利得･適応度、Zは規格化定数を表している。

- **INTERPRETATION**: :利得が高ければ、その戦略をとる確率が高い（**限定合理性**）。
- **DISTINCTIVE**:STATICS, Non- Externality

TRADITONAL EVOLUTIONARY GAME

- **ASSU.**：各主体は高い利得・適応度を得ることを望んでいる.
- Under this assumption, we obtain the unique solution: Selection Dy.→Replicator Eq. Replicator Eq.

$$\dot{x}_i = x_i\left(f_i - \overline{f}\right), i = 1\cdots, N.$$

INTERPRETATION：あるi番目の戦略は平均利得・適応度よりも高ければ、その戦略を確率1で選択する。

DISTINCTIVE： DYNAMICS, EXTERNALITY

PROBABILITY SPACE

- Probability Space (Ω, F, P)

$$\Omega = \{-1, +1\}^{Z^2}$$

戦略の添え字によっては､「－1」→「+2」としても本質は変わらない.

$$\mu \propto \exp[\gamma H(S)]dS \in F$$

(命題1)

μはそれ上の確率測度で, dSはΩ上の一様分布とする。確率論的にはdS は密度1/2 のBernoulli 分布と呼ぶものである。

「確率論としてのゲーム理論」は「第4回数学総合若手研究会」の報告内容を参照されたい。

DEFINITION

DEF.: 戦略が一定の秩序を持っているかどうかを判断する量を**秩序パラメータ**(order parameter) という概念を次のように導入する。

(2.2)

$$m = \langle S_i \rangle = \frac{1}{N}\sum_i S_i \equiv \sum_i S_i P(\{S_i\})$$

where 〈　〉 stands for the average.

EXAMPLE

- 先ほどのEXAMPLEで考える。このとき、

戦略1を確率1でとる場合、m＝1/2,

戦略2を確率1でとる場合、m＝1,

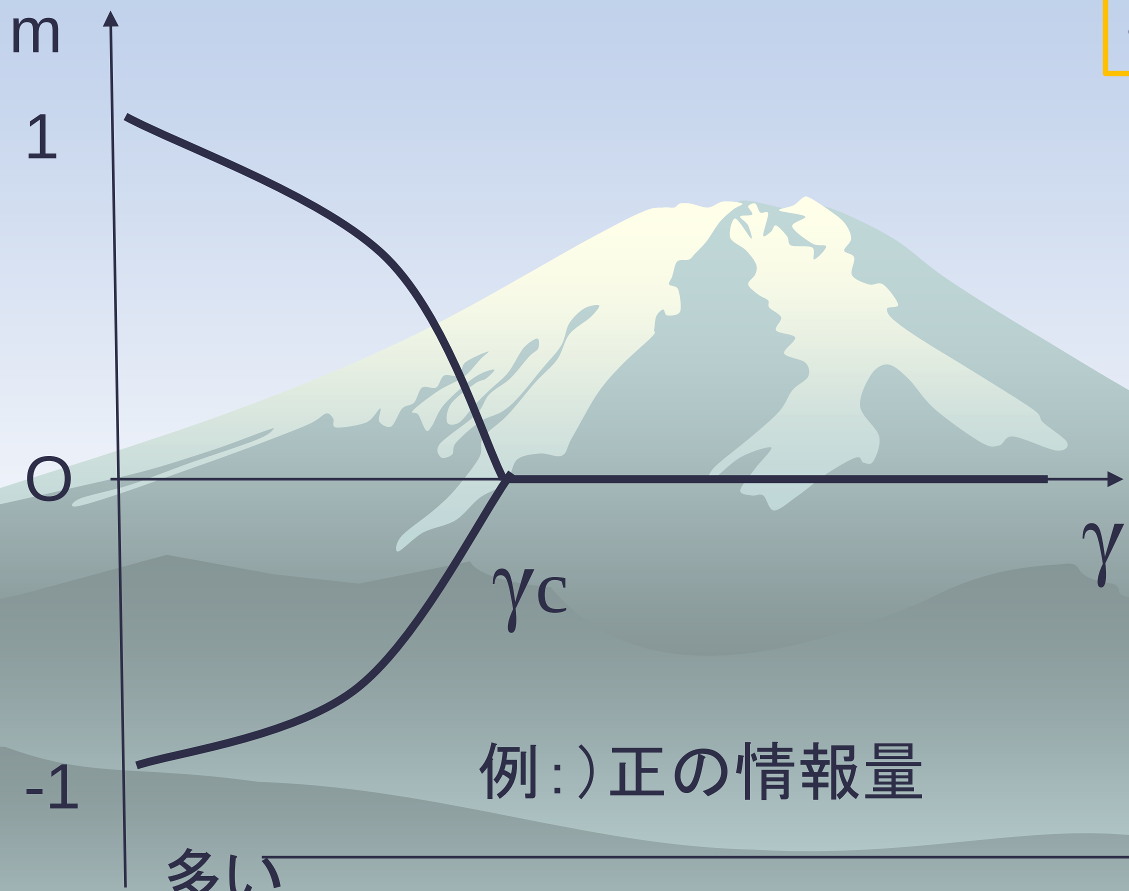
戦略1と2をランダムにとる場合、m＝3/4.

→m の値は、1/2 ≦m ≦ 1の間で、m=1/2に近ければ、戦略1を取る人が多いと分かり、m=1に近ければ、戦略2を取る人が多い。

	S1(1)	S2(2)
S1(1)	A,A	0,0
S2(2)	0,0	B,B

- EXAMPLE : Ising model
- $S_i=\{-1,1\} \rightarrow m= -1,0(\text{random}),1$

（注）：戦略のインデックスが異なる場合でも、このような分岐が起こる。



例：）正の情報量

多い → 少ない

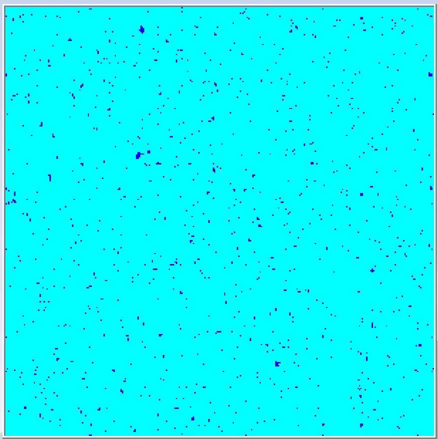
戦略の分布はどちらか一方

戦略の分布はランダム

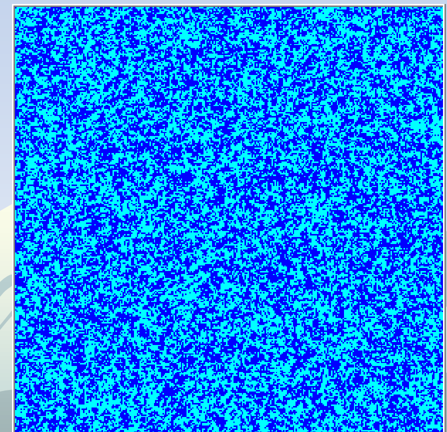
MONTE CARLO SIMULATION

先ほどの分岐図は、格子図で見ると、次のような図である。

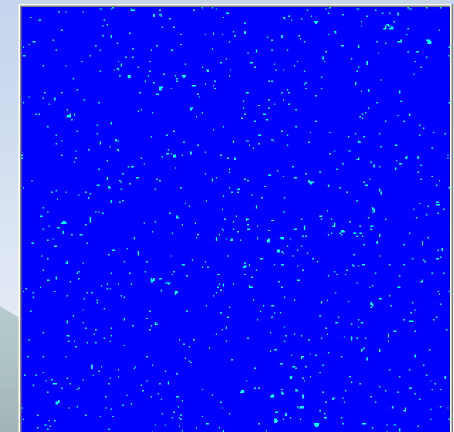
SKY BULUE＝Strategy 1、**INDIGO**＝Strategy 2



←



→



ORDERED TYPE １

$$m^* > 0$$

（s1, s1 ）

NO ORDERED

$$m^* = 0$$

s1とs2
がRandomに選択

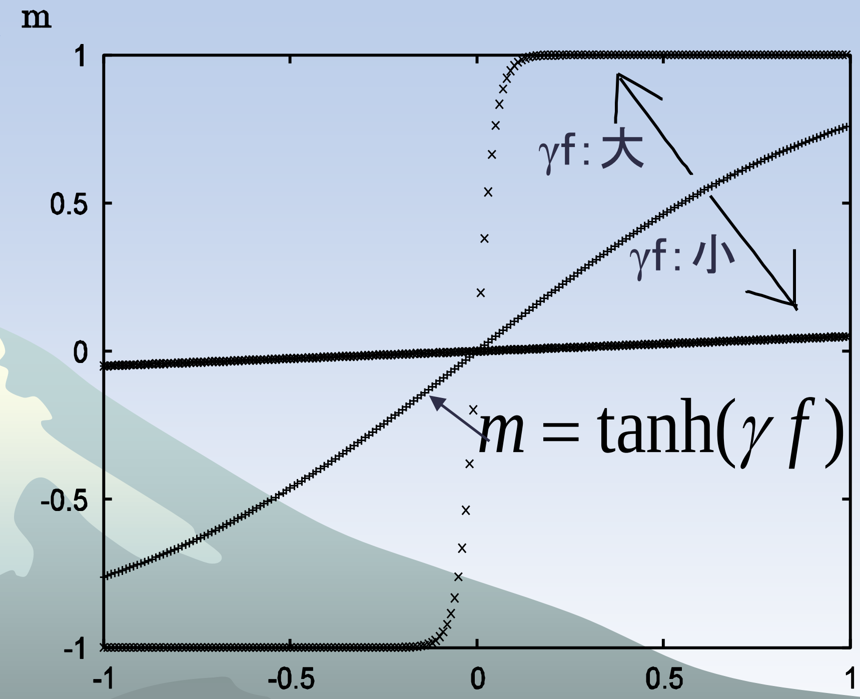
ORDERED TYPE 2

$$m^* < 0$$

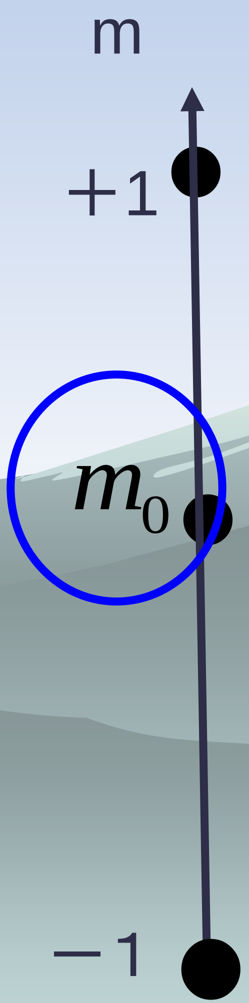
（s2,s2）

秩序パラメータと変数と利得の積との関係

- γfが大きければ、m=+1 or -1 に近づく。正の情報量が多く、利得が多ければ、どちらかの純粋戦略をとりやすくなる。
- 逆にγfが大きければ、m =0 に近づく。正の情報量が少なく、利得が少なければ、戦略の一致が起こりづらくなる。



ORDERED PARAMETER IN REPLICATOR SYSTEM



最も単純な戦略が2つの対称2人ゲームにおいて、REPLICATOR 方程式は

$$\dot{x} = \{(a+b)x - b\}x(1-x), 0 \le x \le 1$$

このときの平衡点(Nash均衡)は、

$$x^* = 0, 1, 0 < \frac{b}{a+b} < 1$$

ORDERED PARAMETER has **three points** (corner point(-1,+1), interior point) in RE. SYS.

EVOLUTIONARY STABLE STRATEGY（ESS)

DEF.: Weibull(1995): $x \in \Delta$ is an ***evolutionary stable strategy (ESS)*** if for every strategy $y \neq x$ there exists some $\overline{\varepsilon}_y \in (0,1)$ such that the following inequality holds for all $\varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon}_y)$

$$u[x, \varepsilon y + (1-\varepsilon)x] > u[y, \varepsilon y + (1-\varepsilon)x].$$

INTERPRETATION:どのような突然変異戦略を採用したとしても、既存戦略の方が効用が高い。

（ESS : ①the solution of the Replicator equation + ② asymptotic stable.）

PROPOSITION

PRO.(Bishop and Cannings (1978)): $x \in \Delta$ is evolutionary stable strategy if and only if it meets these first-order and second-order best-reply :

$$(2.4) \quad u(y,x) \le u(x,x), \quad \forall y,$$

Nash Eq.

$$(2.5) \quad \begin{aligned} & u(y,x) = u(x,x) \\ & \Rightarrow u(y,y) < u(x,y), \end{aligned} \quad \forall y \neq x,$$

Asymptotic Stable Conditon

PROPOSITION

PRO.: 統計力学を用いた進化ゲーム理論において、進化的に安定な戦略とは次の条件を満たすことと同値である.

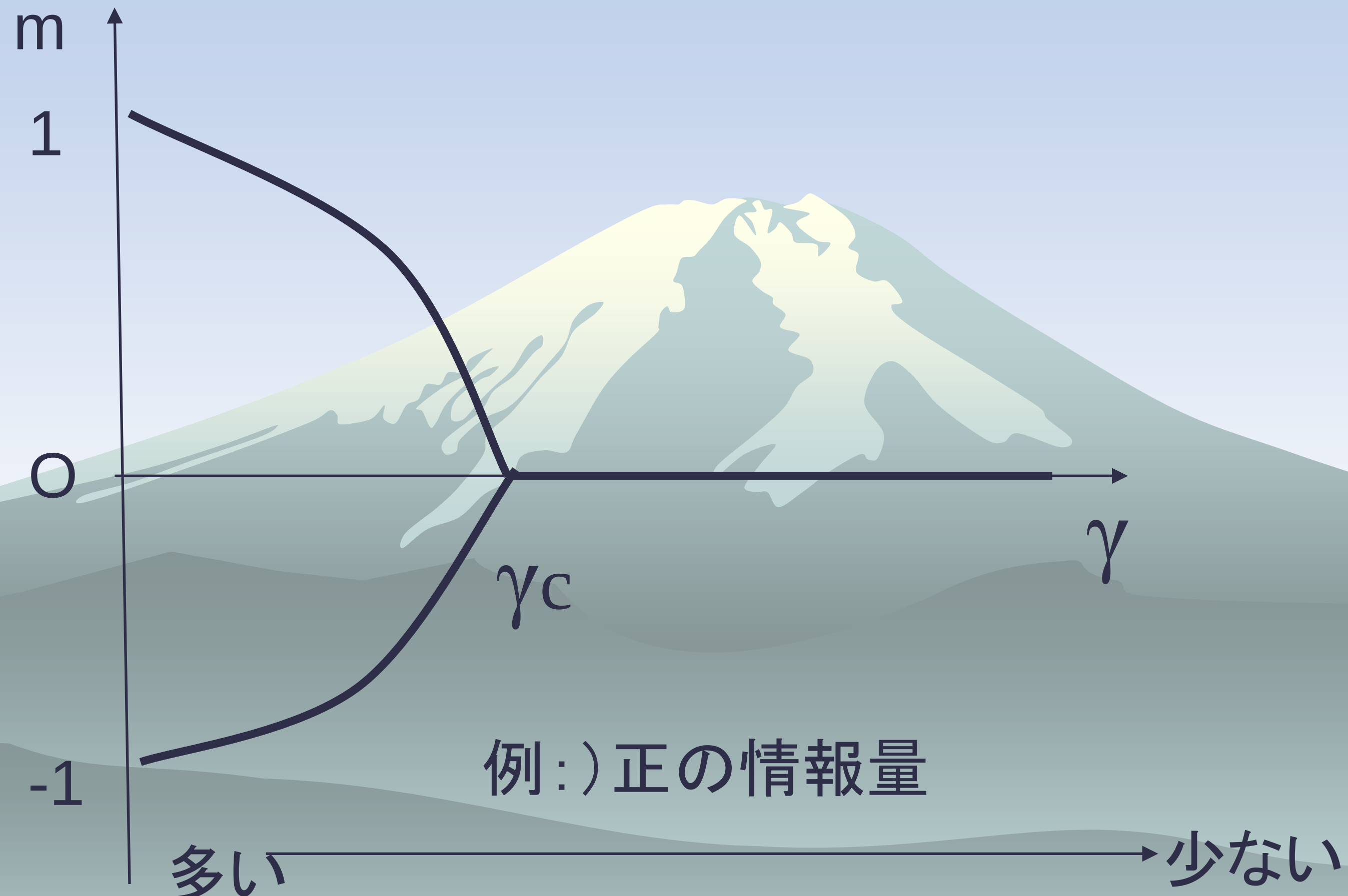
$$(2.4) \quad u(y,x) \le u(x,x), \quad \forall y,$$

$$(2.6) \quad \left| m - m^* \right| < \varepsilon \quad ,$$

Lyapunov Stable Condition

where, m* stands for the index of the strategy

- EXAMPLE: Ising model
- $S_i=\{-1,1\} \rightarrow m= -1,0(\text{random}),1$



戦略の分布はどちらか一方

戦略の分布はランダム

ASYMMETRIC TWO PERSON GAME

- 秩序パラメータをもう1つ定義し、ESSについては、先ほどのPRO. の(2.6)の条件を次のように修正すれば、足りる。

$$\left| m'_1 - m^*_1 \right| < \varepsilon_1 \quad , \left| m'_2 - m^*_2 \right| < \varepsilon_2$$

PERCOLATION

- 2次元Isingモデルにおいて、相転移とPercolationとの関係

THE. (Coniglio, *et al.*(1976)) 2次元Isingモデルにおいて, $\mu^s, s=\{+,-\}$ を平衡における(s)不変確率測度として、次の関係が成り立つ。

(i) $\gamma > \gamma_c$ のとき

$$\mu^+_{\gamma,0}\left(\left|C_0^+\right|=\infty\right)>0, \qquad \mu^-_{\gamma,0}\left(\left|C_0^-\right|=\infty\right)>0$$

(ii) Gibbs 分布の全体 G (γ,h) の任意の端点μに対して

$$\mu\left(\left|C_0^+\right|=\infty\right)\mu\left(\left|C_0^-\right|=\infty\right)=0$$

(i) → あるパラメーター領域において、戦略1と戦略2 のClusterが存在する。
(ii) → あるパラメーター領域において、どちらかの戦略はClusterが存在しないか、両方とも存在しない。

DEFINITION(CONNECTED)

DEF 1. $A \subset B^2$ が**連結** (connected)であるとは, 任意の $x, y \in \bar{A}$ に対して, がとれて $b_1, b_2, \cdots, b_n \in A$
(a) $x \in b_1$ かつ $y \in b_n$,
(b) 任意の $1 \le i \le n-1$ に対して Z^2 のある点 $\boldsymbol{x_i}$ がとれて, b_i および b_{i+1} は $\boldsymbol{x_i}$ を共有する.の2つの条件を満たすことをいう.

DEF 2. $A \subset B^2$ に対し, $C \subset A$ がAの**連結成分**(connected component)であるとは, 次の2つの条件を満たすときにいう.
(a) C は連結であり, $b \in A \setminus C$
(b) 任意の $1 \le i \le n+1$ に対して, $C \cup \{b\}$ は連結でない.

DEF 3. Z^2 の部分集合Aが***連結**であるとは, 任意に $x, y \in A$ をとるとき, A内に点列 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ が取れて, $x_0 = x, x_{n+1} = y$ とかくとき, 任意のに対して

$$\left\| x_i - x_{i+1} \right\| = 1$$

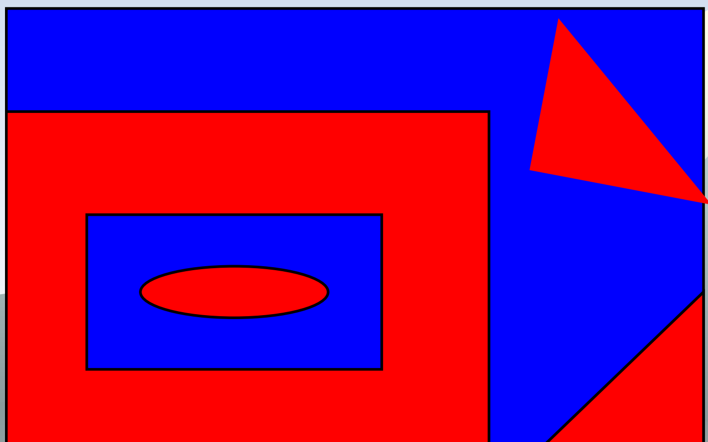
となるときに言う. ただし, $x = \left(x^1, x^2\right) \in Z^2$ に対して,

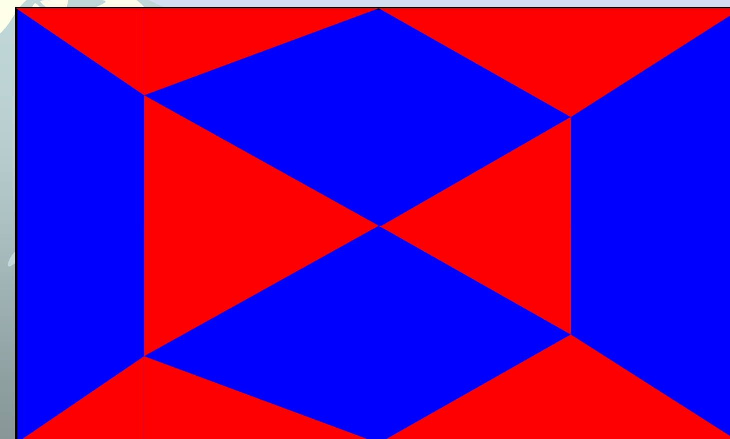
$$\|x\| = \max\left\{ | x^1 |, | x^2 | \right\}$$

とおく.

同心円的なパターン、チェス盤パターン

- Percolationが起こっていない(純粋戦略の均衡がない)とき、どのような戦略の配置が典型的なパターンか？





同心円パターン

→赤を青が取り囲み、またそれを赤が取り囲み、･･･というパターン

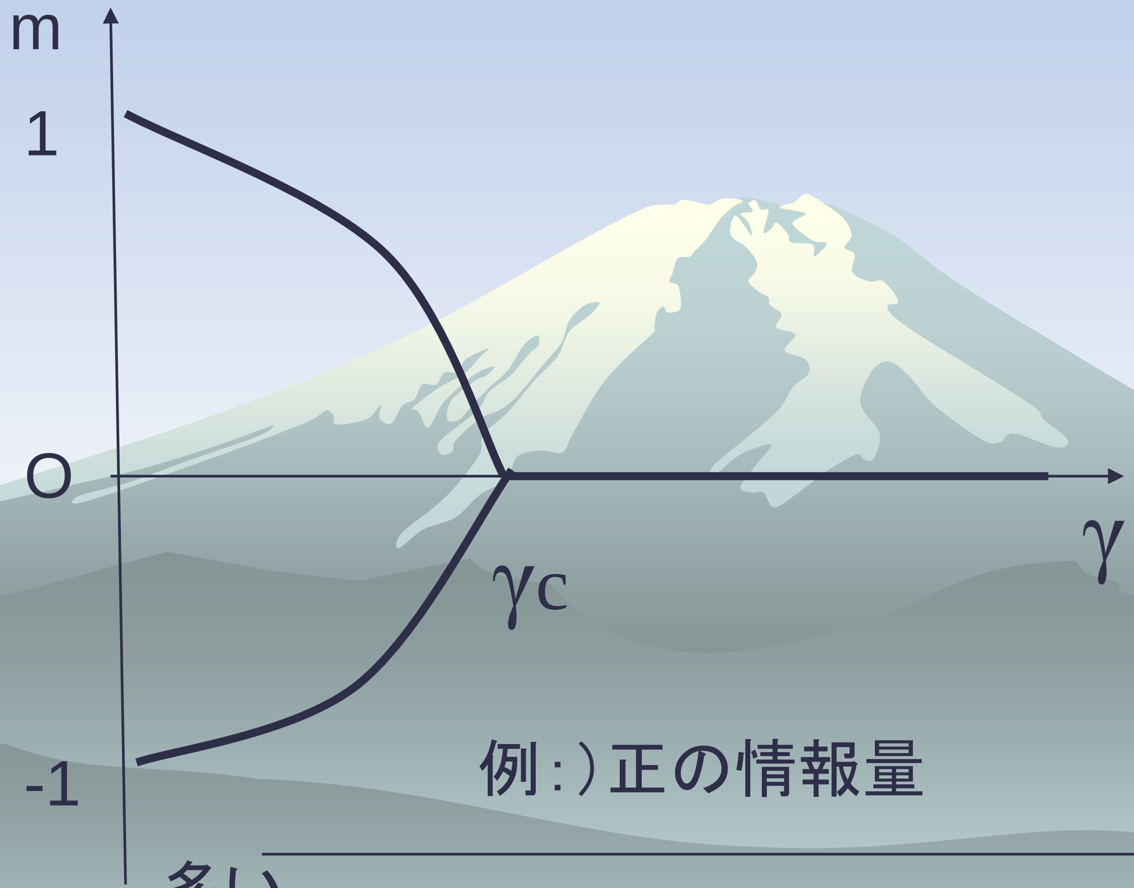
有限な＊連結成分の存在

チェス盤パターン

→赤のかたまりと青のかたまりが互い違いに、配列するパターン

無限サイズ＊連結成分の存在

- EXAMPLE: Ising model
- $S_i=\{-1,1\} \rightarrow m= -1, 0(\text{random}), 1$



例：）正の情報量

多い → 少ない

戦略の分布はどちらか一方

戦略の分布はランダム

無限＊クラスターの存在

TH. (樋口(1995)) $\gamma > 0$ が十分小で, h が $\gamma' h' < \frac{1}{2}\log\frac{p_c}{1-p_c} - 4\gamma'$, $\gamma h < \frac{1}{2}\log\frac{1-p_c}{p_c} - 4\gamma$ を同時に成立させるとき、$\mu_{\gamma,h}$ に関して確率1で無限＊クラスターの共存が起こる。

PROOF. Firstly, we prepare to prove this.

定義A1. Ω上の確率測度μとνに対して, μ≦ νとは, 任意のΩ上の連続かつ単調増加関数 f に対して

$$\int_\Omega f(\varpi)\mu(d\varpi) \le \int_\Omega f(\varpi)\nu(d\varpi)$$

となるときに言う.

定理A.1. (FKG-Holleyの不等式)　$\Lambda \subset Z^2$ を有限集合として，Ω_Λ 上の2つの確率測度μ, νが，任意の $\sigma_1, \sigma_2 \in \Omega_\Lambda$ に対して

(A.1)
$$\mu(\sigma_1 \wedge \sigma_2)\nu(\sigma_1 \vee \sigma_2) \geq \mu(\sigma_1)\nu(\sigma_2)$$

を満たすならば，(Ω_Λ 上の確率測度として) μ≦νである．ただし $(\sigma_1 \wedge \sigma_2)(x) = \min\{\sigma_1(x), \sigma_2(x)\}$, $(\sigma_1 \vee \sigma_2)(x) = \max\{\sigma_1(x), \sigma_2(x)\}$ とする．

系A1. Λを Z^2 の有限部分集合とする．このとき以下のことが成立する．

(i) $\varpi, \eta \in \Omega$ が Ω≦η を満たすならば，$q_\Lambda^\varpi \leq q_\Lambda^\eta$

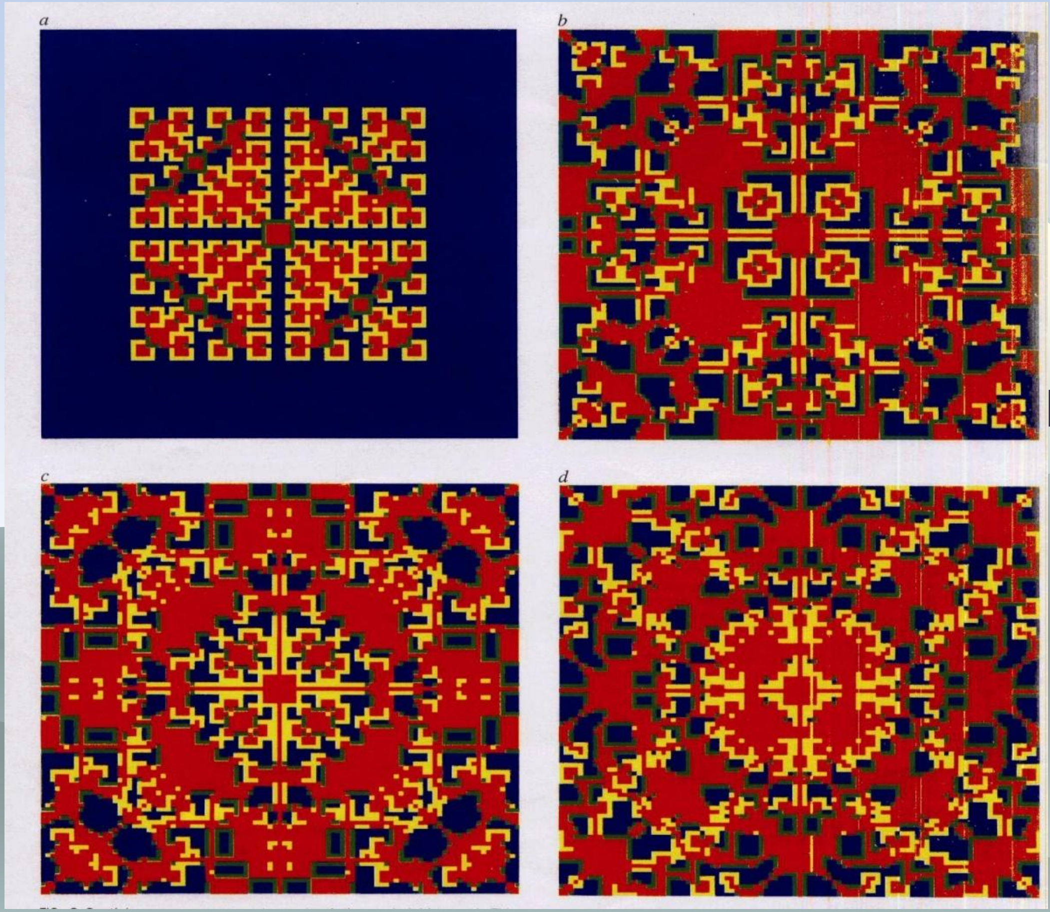
(ii) f,g を F_Λ 可測な単調増加関数とすると任意の $\varpi \in \Omega$ に対して $\int_{\Omega_\Lambda} fg\,dq_\Lambda^\varpi \geq \int_{\Omega_\Lambda} f\,dq_\Lambda^\varpi \bullet \int_{\Omega_\Lambda} g\,dq_\Lambda^\varpi$.

(iii) $\gamma h - \gamma' h' - 4|\gamma - \gamma'| \geq 0$ ならば，任意の $\varpi \in \Omega$ に対して，$q_\Lambda^\varpi(\bullet|\gamma, h) \geq q_\Lambda^\varpi(\bullet|\gamma', h')$.

- **OUTLINE OF THE PROOF.**
- Step 1. 系A.1. → 大小関係を表すための条件を得る.
- Step 2. ＋戦略がPercolationする確率(p_c)と－戦略がPercolation する確率(1-p_c)を求める. 1-p_c < p < p_c であり, それらを同時に成り立つ条件を求めと, 定理2の条件を導出することができる. (証 終)

- →無限＊クラスターの共存が存在
- →このとき戦略の分布はチェス盤のパターン

EX. :SPATIAL PRISONER'S DILEMMA GAME, Nowak and May(Nature, 1992)



青:C(cooperate), 赤D (defect)

黄 D following a C,緑 C following a D

Moore neighborhood(8 neighbors)

Starting with a single defector in a world of cooperators, there is an amazing sequence of ever-growing "Persian carpets".

PERCOLATION は存在しないが、
＊無限クラスターは存在する。

For more detail information, see Nowak,M.A. (2006) Evolutionary Dynamics,

SK MODEL

- Random Matching
- Payoff, Fitness

$$H\left(\left\{J_{ij}\right\}\right)=\sum_{i\neq j}J_{ij}S_iS_j$$

$$where \quad P\left(J_{ij}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi J^2}}\exp\left\{-\frac{(J_{ij}-J_0)^2}{2J^2}\right\}$$

J_0 : Average , J^2 : Variance

$\boxed{\text{Anealed System}}$ → 主体はある程度自由にゲームをする相手を選ぶことができる。

- Expected Utility(Free energy), 分布関数の配位平均.

$$F = \gamma \log \langle Z \rangle,$$

Probability of Matching

$$\langle Z \rangle = \sum_{\{S_i\}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{(ij)} dJ_{ij} P\{J_{ij}\} \exp(\gamma H\{J_{ij}\}),$$

Fitness

$$= \sum_{\{S_i\}} \exp\left[\sum_{(ij)} \left\{ \gamma J_0 S_i S_j + \frac{(\gamma J)^2}{2} (S_i S_j)^2 \right\} \right]$$

Solved

$$\underset{m}{Max} \quad F$$

$$F = \gamma \left[\sum_{[S_i]} \left\{ \gamma J_0 (\sum_i S_i)^2 + \frac{1}{2} (\gamma J)^2 (\sum_i S_i)^4 - \gamma J_0 N \sum_i S_i^2 - \frac{1}{2} (\gamma J)^2 N \sum_i S_i^4 \right\} \right]$$

- m=<Si>と置き、mについて微分すると、

$$\frac{\partial F}{\partial m} = 2\gamma^2 J_0 N^2 m + 2\gamma^3 J^2 N^4 m^3 = 0$$

$$\underline{m = 0} \quad or \quad \underline{\pm\sqrt{\frac{-J_0}{\gamma J^2 N^2}}}$$

As N $\rightarrow\infty$, m = 0 .

Ising Typeではtanh の関数であったが、秩序変数はReplicator系と同様に点、ランダム(0)、戦略の添え字（＋と―）の値であることが分かった。さらに無限人のゲームでは秩序・均衡は存在しないことが分かった。

QUENCHIED SYSTEM

- 当初(Nature)から相互作用の仕方、強さが決まっている。

Expected Utility(Free Energy) $F = \gamma \langle \log Z \rangle$

Replica Method $\langle \log Z \rangle = \lim_{n \to 0} \left(\langle Z^n \rangle - 1 \right)$

Hubbard-Stranovich Trans. $\exp\left[\frac{a^2}{2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[ax - \frac{x^2}{2} \right] dx$

+ saddle point method + replica symmetry

Solved →

$$m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} z^2 \right) \tanh\left(\gamma \tilde{J} \sqrt{q} z + \gamma \tilde{J}_0 n \right) dz$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} z^2 \right) \tanh^2\left(\gamma \tilde{J} \sqrt{q} z + \gamma \tilde{J}_0 n \right) dz$$

→ Ising Type と同様に。

4. EXTENSION

DYNAMICS, EXTERNALITY

DYNAMICS

- Mater Equation

$$\frac{d}{dt}P\left(S_1,\cdots,S_N;t\right)=-\sum_j W_j(S_j)P\left(S_1,\cdots,S_N;t\right)$$
$$+\sum_j W_j(-S_j)P\left(S_1,\cdots,-S_j,\cdots,S_N;t\right)$$

- Local Detail Balance Condition (Sufficient Condition)

$$\frac{W_i(S_i)}{W_i(-S_i)}=\frac{\exp(-\gamma E_i S_i)}{\exp(\gamma E_i S_i)},\quad where \quad E_i=\sum_j J_{ij}S_j$$

- Dynamics of the Ordered parameter

$$\tau\frac{d}{dt}\left\langle m\right\rangle_t=\left\langle \tanh\gamma E_i\right\rangle_t-m_t$$

- Dynamics of the Correlated function

$$\tau\frac{d}{dt}\left\langle S_i S_j\right\rangle_t=-2\left\langle S_i S_j\right\rangle_t+\left\langle S_i\tanh\gamma E_j\right\rangle_t\left\langle S_j\tanh\gamma E_i\right\rangle_t$$

TAP EQUATION

- hjの導入→周りを見る度合い(EXTERNALITY)

$$H\left(\left\{J_{ij}\right\}\right)=\sum_{i\neq j}J_{ij}S_iS_j+\sum_{i\neq j}h_jS_j$$

Annealed System

→Solved

$$h_j=2\gamma m(1-N)(J_0+J^2m^2)$$

秩序変数が自明なもの以外、不連続となるような点は存在しない。

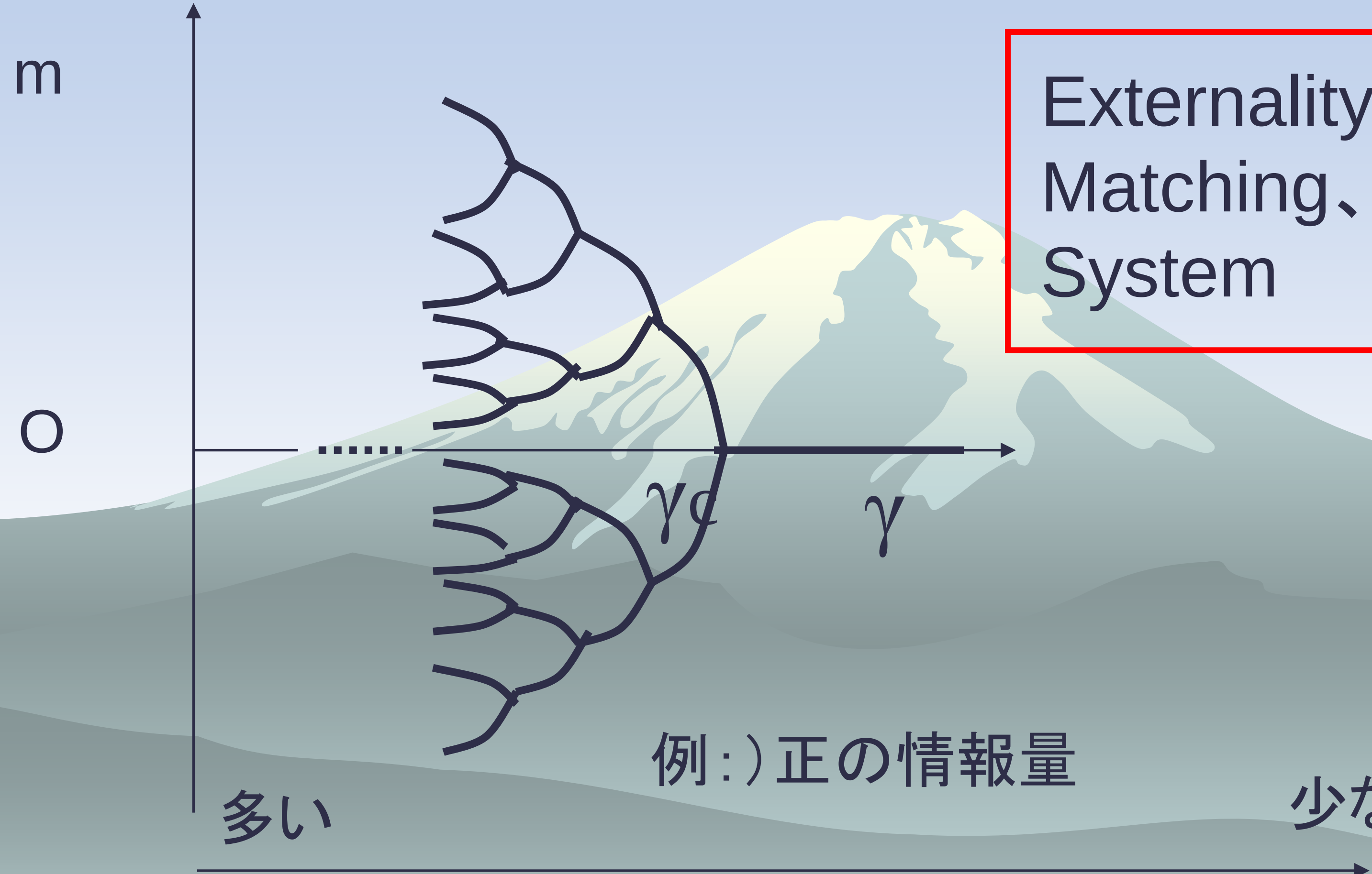
Quenched System

$$m_\lambda=\frac{1}{T-J_\lambda}h_\lambda$$

→最大固有値2Jのとき、秩序変数が不連続となる。

→Multiple Equilibria

MULTIPLE EQUIRIBRIA

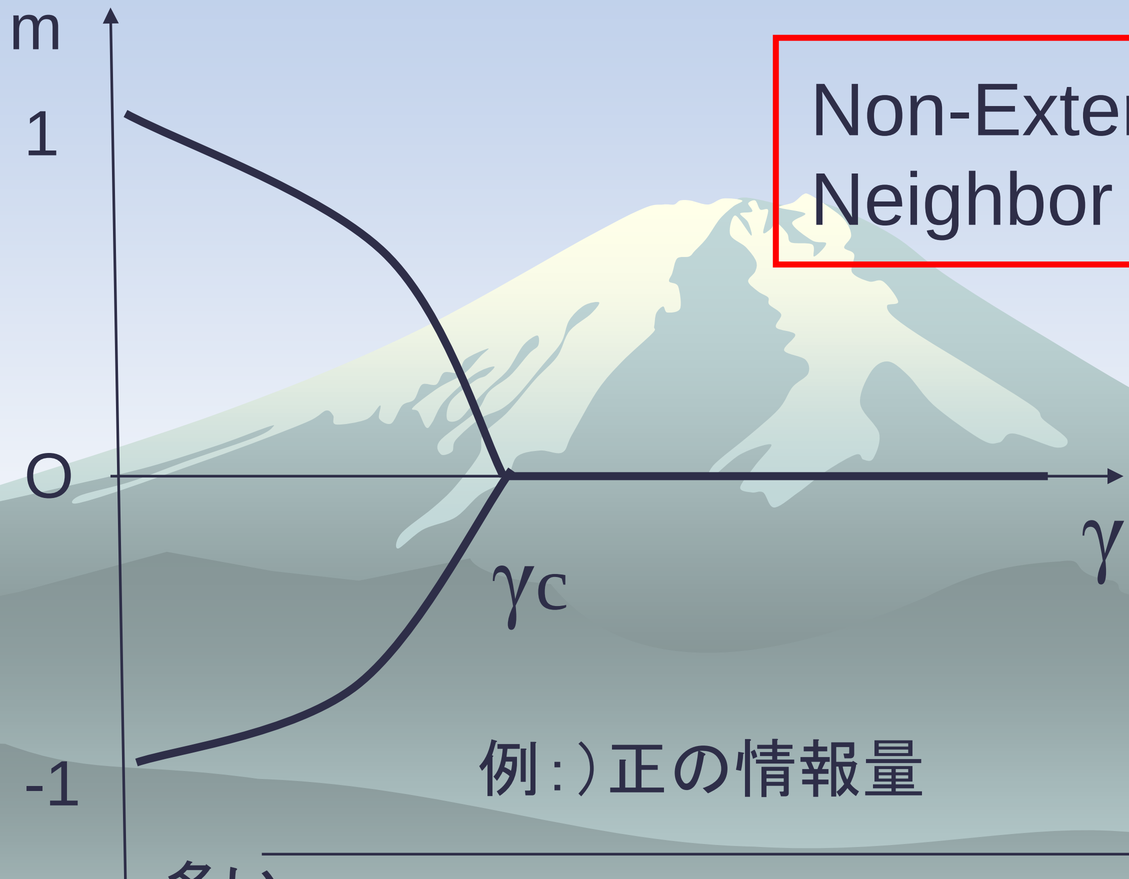


Externality、Random Matching、Quenched System

様々な均衡の存在＝いろいろな状況が均衡となりうる。

戦略に一致のなく、Random

- EXAMPLE : Ising model
- Si={-1,1} → m= -1,0(random),1



Non-Externality, Nearest Neighbor Interaction

例:)正の情報量

多い → 少ない

戦略の分布はどちらか一方

戦略の分布はランダム

5. APPLICATION(Simulation)

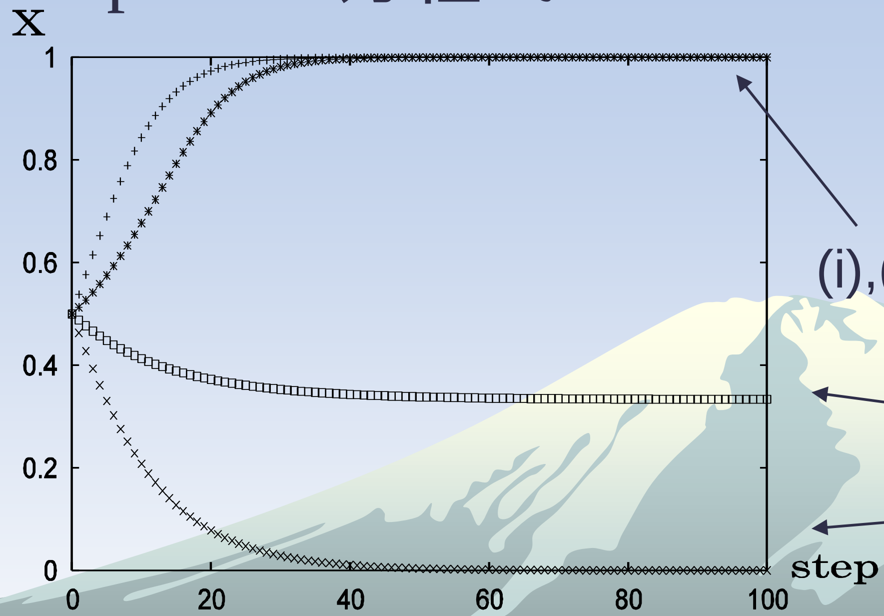
Individual Based Model

Agent Based Model

Monte Carlo Simulation

Simulation : REPLICATOR EQ.

- Replicator方程式のSimulation



$$\dot{x} = x(1-x)\{b-(a+b)x\}$$

(i) a=2, b=-1, (ii) a=-2,b=1,

(iii) a=2,b=1,(vi) a=-2, -1.

- 果たしてよいのか？
- 決定論 vs.確率論
- 一人一人に着目した場合もっと異なる表現があるのでは？
- →Agent Based Simulation, Individual Based Simulation, Mote Carlo Simulation

REVIEW: Replicator Equation

REPLICATOR EQ. $\dot{x}_i = x_i\left((Ax)_i - x\cdot Ax\right), i = 1,\cdots,n.$

ある戦略 i を取ったときの自分の利得が平均利得よりも大きい場合には, その戦略を取る確率が高くなる(学習・模倣)。またゲームをしている周りの主体がその戦略を取る確率が高いほどその増加率も高くなる(外部性の存在), ということを示している.

　また利得が高ければ、その戦略をとる人が多いという仮定（利得の単調性）を仮定すれば、選択ダイナミクスから一意で導出される。

特に戦略が2つのとき

$$\dot{x} = x(1-x)\{b-(a+b)x\} \quad \cdots(*)$$

(注意) Potential Function で考えている.

主な分類:

(I)　非ジレンマ型: a　> 0. b < 0, ESS :1つ
(II) 囚人のジレンマ：a　< 0. b > 0, ESS :1つ
(III) コーディネーション型: a>0,b>0, ESS 2つ
(IV)タカ＝ハト型: a<0,b < 0, ESS 1つ(混合戦略)

		2	
		戦略1	戦略2
1	戦略1	a,a	0,0
	戦略2	0,0	b,b

利得表

Simulation では次の事実の使用

- **FACT.**

An event A that occurs with probability p

is equivalent to

乱数の使用

1) Generate a random number X that distributes uniformly between 0 and 1.

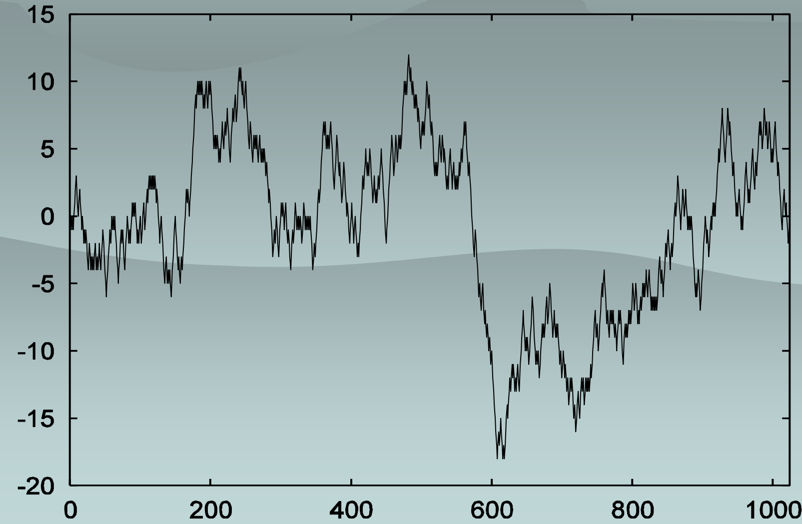
2) If $X < p$, we assume the event A has occurred. Otherwise, the event A did not occur.

EXAMPLE　Toss of Coin

確率1/2 とは、コインの「表」の出る確率。実際にコイン投げを行うと、「表」「表」と続く場合がある。しかしこれを無限回繰り返す（「大数の法則(Law of Large Numbers)」）と「1/2」に定まる.　ここではその極限を見るのではなく、プロセスを見る.

X<1/2 → －1, X >1/2 → +1とする. 平均は0となるはずであるが, 次のような図となる.

Random Walk →



step

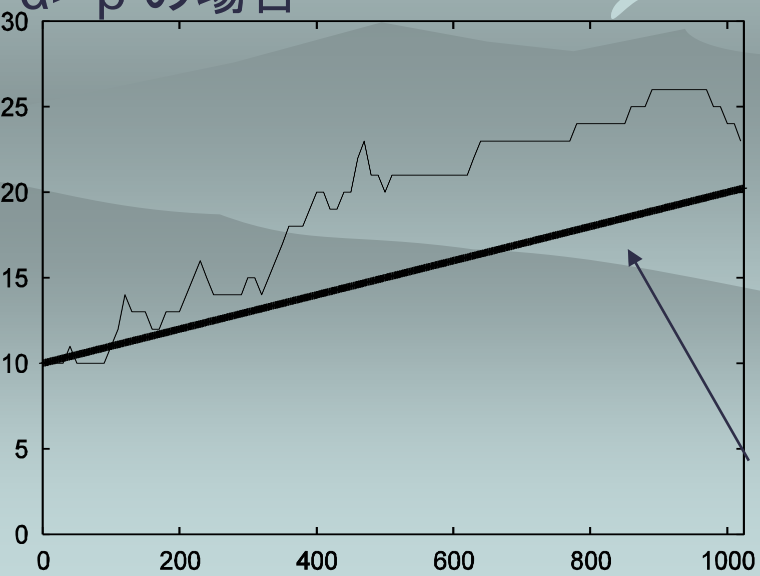
EXAMPLE: Immigration-Emigration Model

- $\frac{dN}{dt} = (\alpha - \beta)$, α: immigration rate, β : emigration rate.
- For all agents repeats

1) Given join to a new individual with probability $\alpha\Delta t$.

2) Emigrate this agent with proability $\beta\Delta t$.

α> β の場合



We also that the change of the population size within time interval Δt is at most ±1. This means that only one of the following three cases occurs mutually exclusively during Δt; 1) an agent joins, 2) an agent goes out, 3) no change. This would be satisfied if we assume the interval Δt is so small that the population size changes ±1.

$$N(t) = (\alpha - \beta)t + 10$$

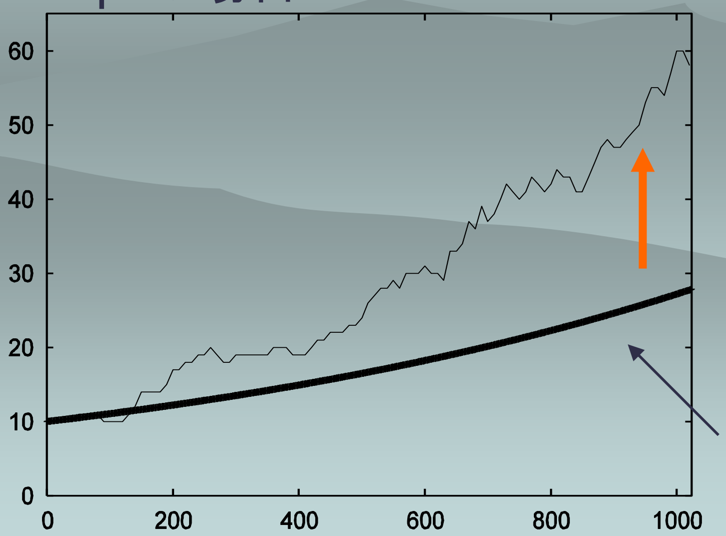
EXAMPLE: Immigration-Emigration Model with Externality

- $$\frac{dN}{dt} = (\alpha - \beta) N$$
- For all agents repeats

1) Given join to a new individual with probability $\alpha\Delta t$.

2) Emigrate this agent with proability $\beta\Delta t$.

$\alpha > \beta$ の場合



乖離が大きくなる

$$N(t) = 10 \exp[(\alpha - \beta)t]$$

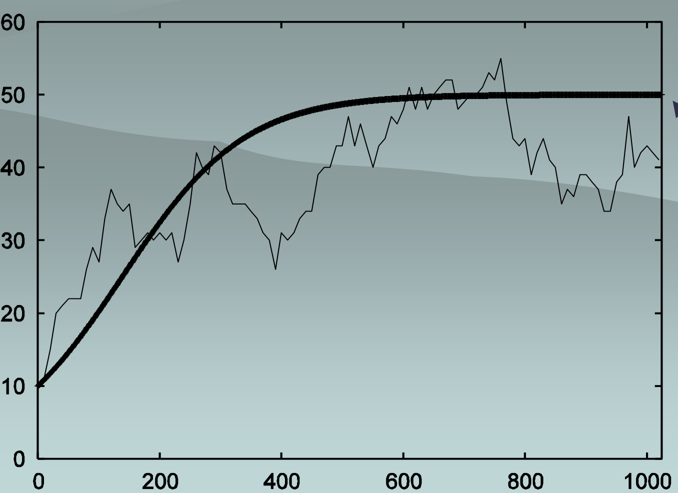
EXAMPLE LOGISTIC EQUATION

- $$\frac{dN}{dt} = r\left(1 - \frac{N}{K}\right)N$$ r:増殖率, K:環境収容力

- For all agents repeats

1) Given join to a new individual with probability join(N)Δt.

2) Emigarate this agent with proability emigrate(N)Δt.



$$N(t) = \frac{10K\exp[rt]}{K + 10(\exp[rt] - 1)}$$

では、Replicator Equation

- Replicator Equation をAgent Based Simulationをするとどうなるのか？

→Replicator Eq.の要素は確率変数であり、Population の変化を記述するAgent Based Simulation はそのままは適用できない。

→そこで、次の定理(Lotka-Volterra方程式とReplicator方程式の関係)を使うことによってReplicator Eq.を考えることができるようになる.

(補足)最近では通常この種の問題を考える場合は、「**Frequency Moran Process**」を用いて分析している。

(Nowak, *et al*.Nature, 2004, Taylor, *et. al*., 2004, Traulsen, *et. al*. PRL, 2005, PRE 2006, Fudenberg, *et. al*., Theoretical Population Biology, 2006, Hashimoto and Aihara, Mimeo, 2008.)

Replicator dynamics and the Lotka-Volterra equation

THEOREM (Hofbauer and Sigmund, 1998, etc.)

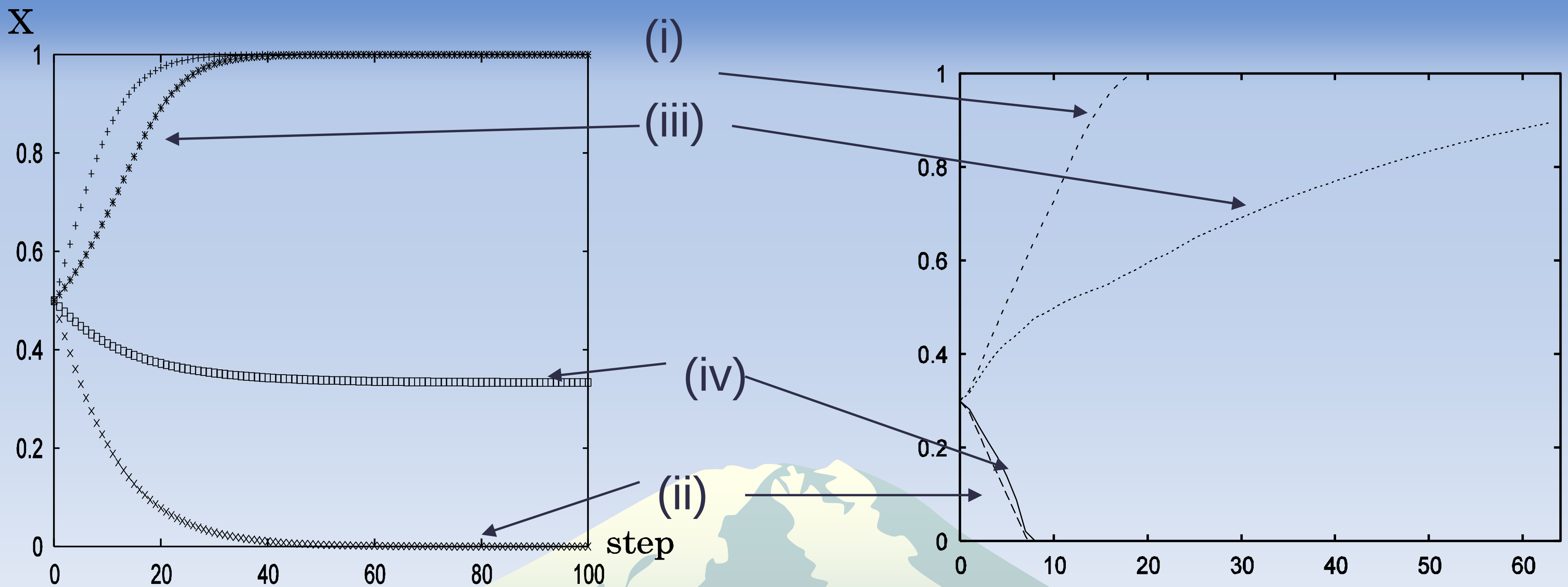
There exists a differentiable, invertible map from $\hat{S}_n = \{x \in S_n : x_n > 0\}$ onto R_+^{n-1} mapping the orbits of the replicator equation

$$\dot{x}_i = x_i\left((Ax)_i - x \cdot Ax\right), i = 1, \cdots, n.$$

onto the orbits of the Lotka-Volterra equation

$$\dot{y}_i = y_i\left(r_i + \sum_{j=1}^{n-1} a'_{ij}\, y_j\right), \qquad i = 1, \ldots, n-1$$

where $r_i = a_{in} - a_{nn}$ and $a'_{ij} = a_{ij} - a_{nj}$



決定論のReplicator Eq.　　　　　　　　Agent Based Simulation

- 構造不安定な均衡(リミットサイクル、複数均衡)は軌道が変更するが、構造安定な均衡の軌道は同様.
- しかしPopulation Size(かなり少数の場合)によってはSwitching など起こることが指摘されている.

→これは化学反応理論のところで研究されている一連の研究と関連(日本では、冨樫さん(東大総合文化、金子研出身, 現阪大)).

離散的な系のSimulation Method

- 元々この研究は1970年代化学反応系で始まった。
- **Stochastic Simulation 法**・・・一般的な微分方程式の数値解法と同様に、時間をある刻み幅Δtに区切り、その刻み幅ごとに反応が起こったかどうか判定する方法
- **Gillespie の方法**・・・各事象i の発生頻度a_iが、事象の発生によってのみ変化

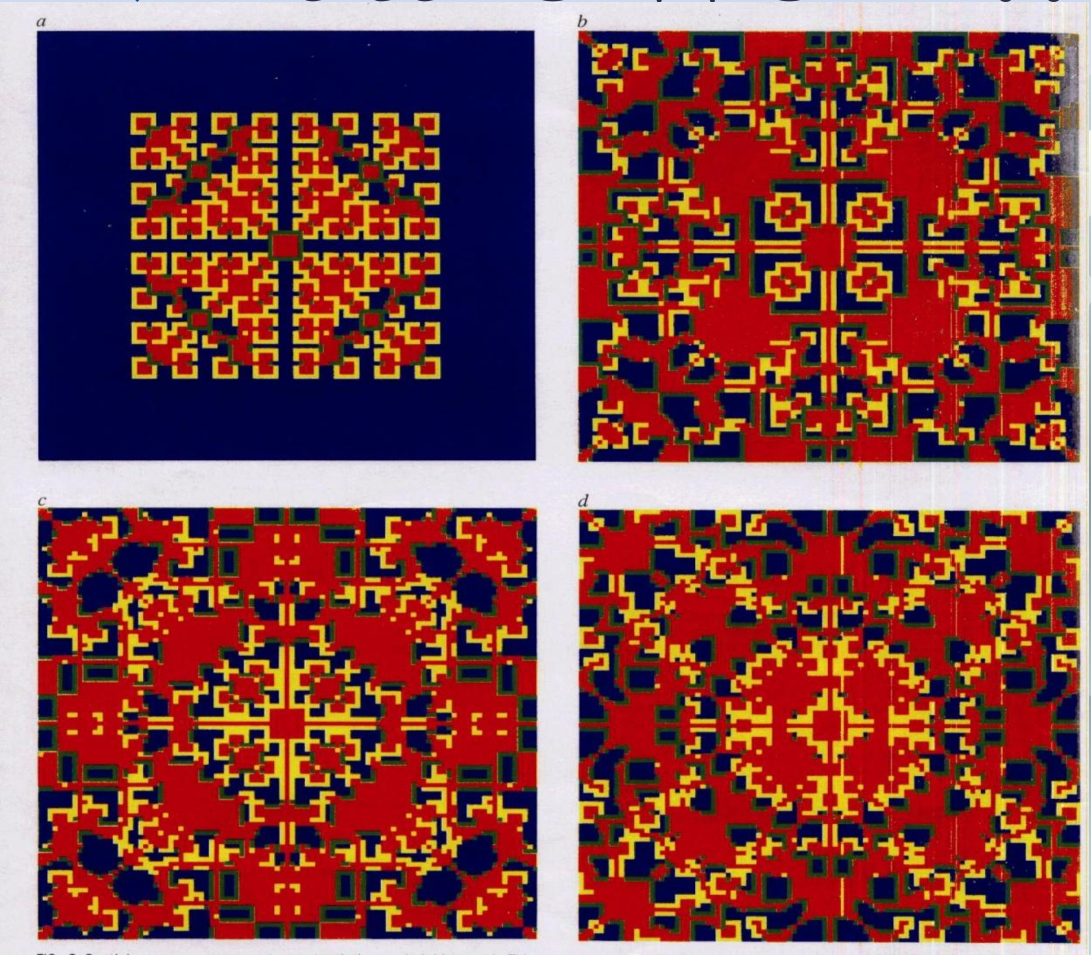
  ①**Direct Method**・・・事象が発生するまでの経過時間が指数分布に従う.

  ②**First Reaction Method**・・・①＋最小の事象のみが起こったとする.（→JSMB Newsletter, No.54 高須夫悟さんの解説記事はこの方法）

  ③**Next Reaction Method**・・・②を計算を効率的に改良.
- **近似的解法**
- **複数の手法の併用**

では、確率的空間囚人のジレンマゲームを行うとどうなるのか？

- Future Work !!



我々のモデルは、Gillespie の方法(命題1)と関連.

6. Summary

SUMMARY

変数を一つ増やし(利得が高ければ、確率1で増加するものを、ある変数によるとした)、複雑な状況の存在を示した。

- **Sec. 2**: Ising Model を用いて、最近接とゲームを行うモデルの定式化し、ESSを特徴づけた。
- **Sec. 3**: SK Modelを用いて、ランダムにマッチングし、ゲームを行うモデルの定式化を行った。

→2つのモデルとも変数によって、ランダムになるものと、2つの秩序・均衡が存在するということを示した。また無限人経済では均衡は存在しない。

- **Sec.4**: 動学にし, 外部性が存在する、Quenched Systemでは多重解の存在→多様な状態を記述？
- **Sec.5**: Agent Based Simulation を試みた.

SPATIALITY, REGIONALITY

- Sec.2: Ising Model … Nearest negihbourhood

空間性あり. 秩序変数とパラメーターγとの関係は tanh の関数に

- Sec.3: SK Model … Random Matching

空間性なし(Annealed Sys.) → 純粋戦略かランダムに

無限人経済:戦略の一致は起こらず、ランダムに

空間性あり(Quenched Sys.) → tanh の関数に

- Sec.4: Extension: Externality

SK(Quenched Sys.)+Externality → Multiple Equilibria

→多様な社会の存在。

(解釈)生まれてくるのはランダムな場所に生まれる+周りに影響され、行動を決める。→地域特有な均衡・制度が生まれる。

Fin

MAJOR REFERENCE

- Bishop, D. T. and Cannings, C.: "Models of animal conflict,“ *Advances in Applied Probability*, Vol. **8** (1976), No. 4, pp. 616-621.
- Coniglio,A. N. , Chiara R., Peruggi, F. and Russo, L.: "Percolation and phase transitions in the Ising model,“ *Communications in Mathematical Physics*, Vol. **51**, Number 3(October, 1976), pp. 315-323.
- Cont, R. and Bouchaud, J-P.: ‘’Herd Behaivor and Aggregate Fluctuations in Financial Markets,’’ *Macroeconomic Dynamics*, **4** (2000), pp. 170-196.
- Diederich, S. and Opper, M.: "Replicators with random interactions: A solvable model,“ *Physical Review A*, Vol.**39**, Number 8 (1989), pp.4333-4336.
- Glauber, R. J.:"Time-dependent statistics of the Ising model,“ *Journal of Mathematical Physics*, Vol. **4** (1963), pp. 294-307.
- 樋口保成:「イジングモデルのパーコレーション」数学, Vol. 47 (1995), pp.111-124.
- 吉川満:「統計力学を用いた進化ゲーム理論」『京都大学数理解析研究所講究録』2008年, 印刷中.
- Mezard, M., Parisi, G. and Virasoro, M. A.: *Spin Glass Theory and Beyond*, World Scientific, 1987.
- Weibull, J.W.: *Evolutionary Game Theory*, MIT Press,1995.
- Wilson,W, *Simulating Ecological and Evolutionary Systems in C*, Cambridge University Press, 2000.

Acknowledgements

この報告内容は「 **2007年度 夏季研究会**」(関西学院大学経済学研究会),「**第4回　生物数学の理論と応用**」(京都大学数理解析研究所) 」, 「**経済物理学III**」 (京都大学基礎物理学研究所), 「**第4回数学総合若手研究集会**」(北海道大学数学COE),「**京都ゲーム理論ワークショップ2008**」にて報告したものを、加筆・訂正したものである。

筆者はこれらの研究会で報告することによって, 多くのコメントや刺激を受けたことに感謝したします.

2008年3月　　吉川　満。