非対称2人ゲームにおける漸近安定な均衡の発生とその変化

関西学院大学大学院経済学研究科
D2
吉　川　満
(mitsurukikkawa@hotmail.co.jp)

2007年3月24日(土)

進化経済学会第11回大会(京都大)

会議室III セッション(11) 社会経済実験・進化ゲーム（後半）④

目次

研究の目的

- 進化ゲーム理論の新しい研究の方向性の提案

  1. ノイズ(ここでは、新規参入者)の影響を考える。(例：最終提案ゲームではGale, Binmore and Samuelson (1995))

  →非線形性を考慮に入れず、局所のみを取り上げている。

  → 近可積分系の研究を導入(本論文)。

•Gale,John, Keneeth G.Binmore and Larry Samuelson: “Learning To be Imperfect: The Ultimatum Game,” Games and Economic Behavior, Vol.8 (1995), pp.56-90.

Gale, Binmore and Samuelson (1995), GEB

- 最終提案ゲーム:

プレイヤー:2つのタイプ(提案者と応答者)

プレイヤーの間で、Πの分割を考える。

提案者が応答者にどのくらいの割合を与えるのか？

→合理的な提案者ならば、できるだけ少なく、応答者に提案する。

→しかし社会経済実験では、「公平な」提案が存在する。(アノマリー)

→Gale, et al.(1995)はこのゲームを定式化し, ノイズの影響によって「公平な」提案の発生を説明した。

近可積分系とは？

- 積分できない系 （ノイズが存在することによって）

→解析的に分析するのが困難。しかし現実はこの方が多い。

- 本論文は、Gale, et (1995) を一般化し、近可積分系の議論を行った. それを通じて、本来の近可積分系の重要な概念を進化ゲームの枠組みで、minimal に定式化.

近可積分系で重要な定理

- **Kolmogorov - Arnold - Moser (KAM)の定理**:(アーノルド-アベス (1972))

$$H(=H_0(p)+H_1(p,q), \quad H_1(p,q+2\pi)=H_1(p,q) \ll 1)$$

が十分に小さいならば、ほとんどすべての ϖ^*

に対して、摂動系 $\dot{p}=-\dfrac{\partial H_1}{\partial q}, \quad \dot{q}=\varpi_0(p)+\dfrac{\partial H_1}{\partial p}$

の不変ドーナツ形 $T(\varpi^*)$ で $T_0(\varpi^*)$に近いものが存在する。

→ 意訳:ノイズが存在しても, ゲームは壊れない.

- **Arnold拡散** (Arnold,1964)

→横断面に沿って, トーラスが崩壊・拡散していく.

→作用変数は保存量とならず、「ゆっくりと」運動する。(本論文では、外生的に)

アーノルド, V.I. and A.アベズ: 「古典力学のエルゴード問題」吉岡書店, 1972年.

モデル：枠組み、進化ゲーム理論

- 対称2人ゲームと非対称2人ゲームの違い

→利得表が異なる(戦略が2つの場合)

タイプ2

タイプ1		S1	S2
	S1	A,A	C,B
	S2	B,C	D,D

対称2人ゲーム

タイプ2

タイプ1		S1	S2
	S1	A,E	C,G
	S2	B,F	D,H

非対称2人ゲーム

Replicator 方程式:　1本　　2本

例）先進国-途上国 ,資本家-労働者　など異なる利得構造をしている。もちろん、一緒でも構わない。

Samuelson and Zhang,1992, JET

定義 1. $\pi^i : A^1 \times A^2 \to R,$ *i* =1,2. そのとき以下の条件を満たすとき, すべての $(x,y) \in \Delta^{n_1} \times \Delta^{n_2}$ で, 選択ダイナミクス(selection dynamic)

$$\dot{x}_j = \pi_j(x,y), \quad j = 1,\ldots,n_1 \quad , \dot{y}_k = \pi_k(x,y), \quad k = 1,\ldots,n_2$$

(1.1) π_j, π_k はリプシッツ連続 (Lipschitz continuous)である. つまり, $\exists m \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x, x' \in \Delta^{n_1}, \ \forall y, y' \in \Delta^{n_2}$

$$\max\{|\pi_j(x,y) - \pi_j(x',y')|, |\pi_k(x,y) - \pi_k(x',y')|\} \le m|(x,y) - (x'-y')|$$

(1.2) $$\sum_{j=1}^{n_1} \pi_j(x,y) = 0 = \sum_{k=1}^{n_2} \pi_k(x,y)$$

(1.3) $\forall x \in \Delta^{n_1}, \quad x_j = 0 \Rightarrow \pi_j(x,y) \ge 0$

$\forall y \in \Delta^{n_2}, \quad y_k = 0 \Rightarrow \pi_k(x,y) \ge 0$ という.

Samuelson, L. and J.Zhang: “Evolutionary Stability in Asymmetric Games,” Journal of Economic Theory, Vol.57 (1992), pp.363-391.

定義2 π_j と π_k は(1.1)-(1.3) と以下の条件を満たすとき, 正則選択方程式(regular selection dynamics)と言う.

$$\frac{\pi_j}{0} \equiv \lim_{x_j \to 0} \frac{\pi_j}{x_j}, \qquad \frac{\pi_k}{0} \equiv \lim_{y_k \to 0} \frac{\pi_k}{y_k}.$$

定義3　利得 π_j は以下の条件を満たすとき, 単調(monotonic)である. $j, j' \in \Delta^{n_1}$,

$$\pi^1(j, y) > (=) \pi^1(j', y) \Rightarrow \frac{\pi_j(x, y)}{x_j} > (=) \frac{\pi_{j'}(x, y)}{x_{j'}},$$

定義4 選択方程式 (π_j, π_k) は以下の形をしているとき, Replicator 方程式 という.

$$\frac{\pi_j(x,y)}{x_j} = \pi^1(j,y) - \sum_{j=1}^{n_1} x_j \pi^1(j,y),$$

同様に, π_k についても定義することができる.

ポイント
どんな選択方程式にも、利得の単調性を仮定することによって、Replicator方程式が導出できる。よって様々な分野の研究に用いることができる。(ミクロ経済はもちろん、貿易、マクロ経済・・・など)

Replicator 方程式と利得表

- 戦略が2つ、プレイヤー2タイプ
- 利得行列 $P^1 = \begin{pmatrix} f_1 & f_3 \\ f_2 & f_4 \end{pmatrix}, P^2 = \begin{pmatrix} g_1 & g_3 \\ g_2 & g_4 \end{pmatrix}$
- Replicator方程式 →利得が高い戦略の頻度が増加する、を表現
  - $y = y(1-y)\{f_1 - f_2 + x(f_3 - f_4 - f_1 + f_2)\}$
  - $x = x(1-x)\{g_4 - g_2 + y(g_3 - g_4 - g_1 + g_2)\}$

タイプ2の人間が戦略2をとる確率を x

タイプ1の人間が戦略1をとる確率を y

式変形すると

$$\dot{y} = y(1-y)\{a-(a+c)x\}, \qquad (2.1)$$

$$\dot{x} = x(1-x)\{d-(b+d)y\} \qquad (2.2)$$

主な分類:

(I) 非ジレンマ, **囚人のジレンマ型**: ac < 0. bd > 0,ESS :1つ。

(II)コーディネーション型: a>0,b>0,c>0,d>0, ESS 2つ。

(III)チキン型: a<0,b<0,c<0,d<c0, ESS 2つ。

(IV)マッチング・ペニー型: ab<0,cd<0, ac>0,bd<0, ESS 0つ。

2

1

	戦略1	戦略2
戦略1	a,b	0,0
戦略2	0,0	c,d

利得表

ノイズの存在(新規参入者の存在)

- Gale, et al. (1995)

→ 選択方程式に $\delta_i \dfrac{l^1+l^2}{2}$ の参入、退出するを導入。

先ほどと同様に, Replicator 方程式を導出.

ノイズがあるReplicator 方程式(2.3),(2.4):

$$\dot{y}=(1-\delta_1)y(1-y)\{a-(a+c)x\}+\delta_1(\frac{1}{2}-y),$$

$$\dot{x}=(1-\delta_2)x(1-x)\{d-(b+d)y\}+\delta_2(\frac{1}{2}-x)$$

$$0<\delta_1,\delta_2 \ll 1$$

均衡の安定性(命題1)

- 考えられる均衡(y^*, x^*) : (0,0),(0,1),(1,0),(1,1),$\left(\frac{d}{b+d},\frac{a}{a+c}\right)$
- Jacobi行列:

$$\begin{pmatrix} (1-2y)\{a-(a+c)x\} & -(a+c)y(1-y) \\ -(b+d)x(1-x) & (1-2x)\{d-(b+d)y\} \end{pmatrix}$$

- 固有値が負

⇔(0,0): a<0,d<0, (0,1): c>0,d>0, (1,0): a>0, b>0

(1,1): b<0, c<0,

$\left(\frac{d}{b+d},\frac{a}{a+c}\right)$: $\frac{abcd}{(a+c)(b+d)}$ >0 鞍点

<0 リミット・サイクル

漸近安定な内点均衡の発生(命題2)

- 純粋戦略についての固有値は変更なし
- 内点解のJacobi行列

$$J^n\left(\frac{d}{b+d},\frac{a}{a+c}\right)=\begin{pmatrix} -\delta_1 & -\frac{bd(a+c)}{(b+d)^2} \\ -\frac{ac(b+d)}{(a+c)^2} & -\delta_2 \end{pmatrix}$$

→固有値の実根が負の存在　　$\rightarrow \frac{abcd}{(a+c)(b+d)}<0$

→ノイズの存在によって, 漸近安定となった内点均衡は
「鞍点」ではなく､「リミットサイクル」であると分かる。
→この内点は、構造不安定である。

例:最終提案ゲーム

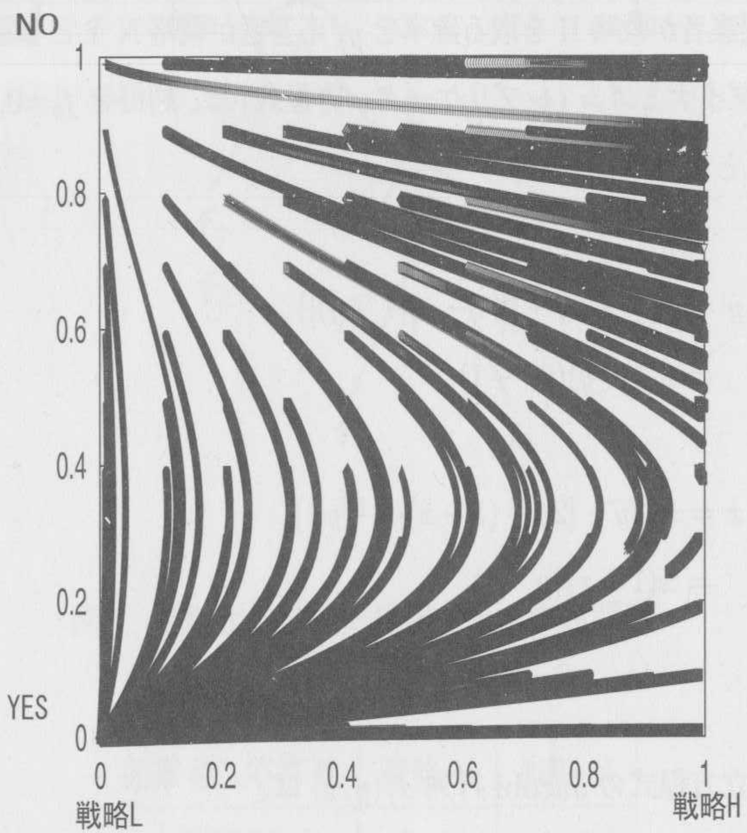


図 2: ノイズがない場合

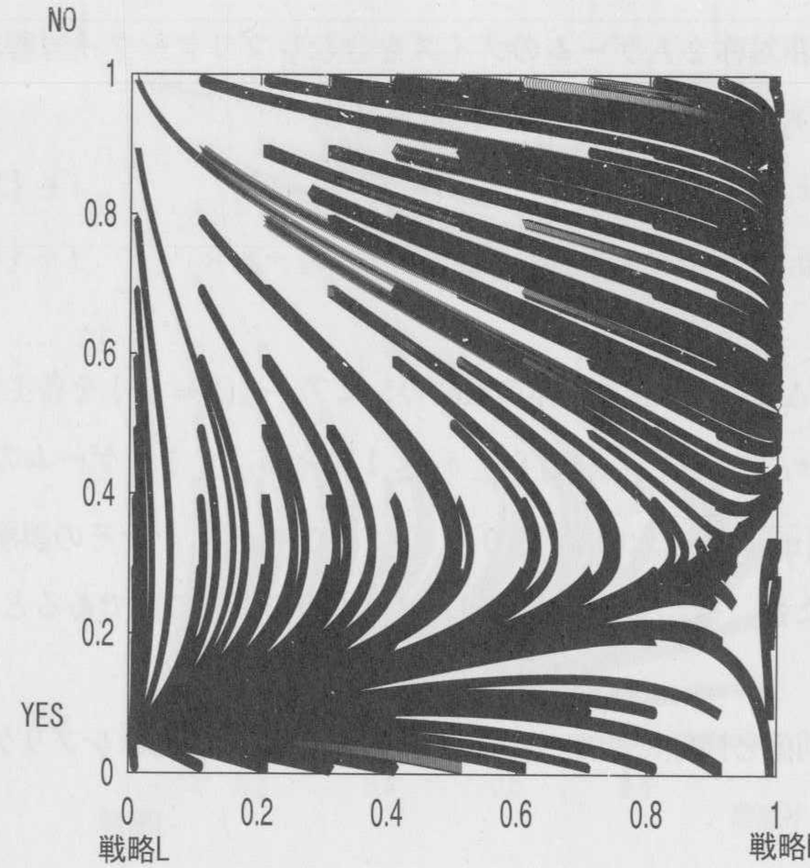


図 3: ノイズがある場合 ($\delta_I = 0.01$, δ_{II}=0.1).

吉川満「非対称2人ゲームの大域的な分析とノイズの役割」『関西学院 経済学研究』第36号 (2005), pp. 21-38. より転載

その存在(内点解は存在するのか？)

$$\phi = \frac{(1-\delta_2)\delta_1}{(1-\delta_1)\delta_2} = \frac{y(1-y)\{a-(a+c)x\}(\frac{1}{2}-x)}{x(1-x)\{d-(b+d)y\}(\frac{1}{2}-y)}$$

$$= \frac{(d-\varepsilon)(b+\varepsilon)\{a-(a+c)x\}(1-2x)}{\varepsilon(b+d)(b-d+2\varepsilon)x(1-x)}$$

$\frac{a}{a+c} < x < \frac{1}{2}$　それとも　$\frac{1}{2} < x < \frac{a}{a+c}$

の範囲内で，内点解が存在する.

第1積分（Lyapunov関数）

2本のReplicator 方程式から導出(Hofbauer(1996), 吉川(2005))

ゲームの状況からある値への関数:
→エントロピーの形をしている。→情報理論への発展性が可能

- ノイズなし ((2.1), (2.2) から導出)

$$H = \log \frac{y^d (1-y)^b}{x^a (1-x)^c} = \log x^{-a} y^d + \log(1-x)^{-c} (1-y)^b$$

- ノイズあり ((2.3), (2.4) から導出)

$$H_n = \log \frac{y^d (1-y)^b (\frac{1}{2} - x)^{\delta_1}}{x^a (1-x)^c (\frac{1}{2} - y)^{\delta_2}}$$

補足（Hofbauer(1996), JMB）

- この第1積分は、次の正準方程式を満たす。

→ Hamilton 系　の議論ができることへの裏づけ。

$$\dot{x} = P(x,y)\frac{\partial H(x,y)}{\partial y}, \quad \dot{y} = -P(x,y)\frac{\partial H(x,y)}{\partial x},$$

$$where \quad P(x,y) = x(1-x)y(1-y).$$

Hofbauer, J. : “Evolutionary Dynamics for Bimatrix Games: A Hamiltonian system ?,” Journal of Mathematical Biology, Vol.34 (1996), pp.675-688.

KAMの定理の成立(命題4)

$$\frac{dH}{dt} = 0, \quad \frac{dH^n}{dt} \neq 0 \Rightarrow \ H^n$$ は発散しないか？

- Kolmogorov - Arnold – Morser (KAM)の定理は成立しているのか？（→ノイズが存在しても、ゲームが崩壊するのであろうか？）

ノイズを入れても, Lyapunov関数が発散しない値が正の測度で存在する。

→ ノイズを入れても, 不変トーラスの存在

証明：連続性の証明法を使用.

Arnold拡散

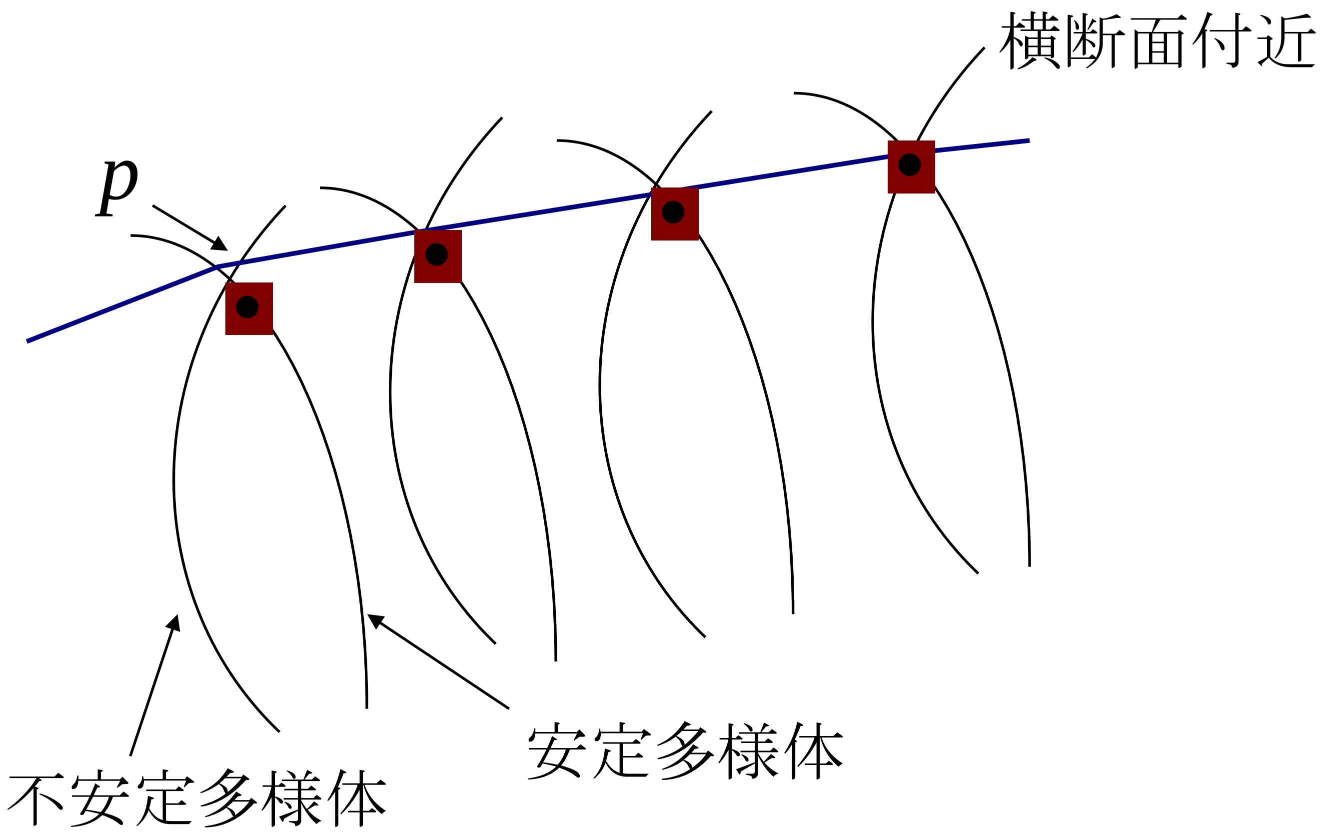
論理:

1. KAMの定理により, 不変トーラスの存在.(**命題4**)
2. 大域的に不安定なゲームにノイズを入れると, 局所安定な内点均衡が存在する。(**命題2**)
3. 安定多様体と不安定多様体が交わる(Melnikov関数が0)となる点*p*の存在.

   →横断面の存在.
4. 遷移チェーンの存在. (Arnold(1964), Theorem 2)
5. それをつなぐ, 軌道の存在. (Arnold(1964), Theorem 3)

Arnol'd,V.L: "Instability of dynamical systems with several degree of freedom," Soviet Math. Doklady, Vol.5 (1964), pp.581-585.

Arnold拡散の概念を図示



を連ねる軌道の存在

まとめ(定理1)

- 定理1.　純粋戦略と混合戦略という複数均衡を持つ大域的に不安定なゲームに, ノイズが存在する場合, Arnold拡散が存在する.

→　通常、Arnold拡散はMelnikovの方法を用いて、証明するが、本稿では、ゲーム理論の文脈から導出した。また、進化ゲーム理論の枠組みで、なおかつMinimal なモデルで証明した。

この考えを応用した吉川(2006)①

Sethi and Somanathan (1996)　を基礎として、利得が時間と共に変化する。

- 内点解が「共有地の悲劇」を回避、と考える
- 大域的不安定なゲームにノイズ(新規参入者)が存在すると、回避することができる.

→条件は異なる。環境の固有値が負のとき(パイが縮小しているとき→生き残るため？)

Sethi, Rajiv, and E.Somanathan: “The Evolution of Social Norms in Common Property Resource Use,” American Economic Review, Vol.86 (1996), pp.766-788.

吉川満:「共有資源のゲームにおけるノイズの効果」『関西学院　経済学研究』第37号(2006) , pp. 305-324.

吉川(2006)②

- 1つのみ、固有値がプラスの場合。

→Poincare写像の導入して分析。

→新規参入者の割合と、環境の変化の割合の比によっては、共有地の悲劇を回避することができる。(定理2.)

→ある程度政府の政策の有効性を主張。

例:タクシーの参入規制

戦略:{低価格化、高級化}、パイ:ある一定の需要(可変)

結論:パイが縮小しており、新規参入者がいるとき、お互い潰し合わず、「共存共栄」。逆にパイが大きくなっているとき、競争が激しくなる。新規参入者が多い場合、悲劇が起こり、少ない場合、悲劇を回避する。

→不況は手を組み、棲み分け。好況は競争。

→一般的な経済学の理論とは逆？

今後の展開（現在進行中）

- Replicator方程式4本(戦略の数が4つの対称2人ゲーム):

競争系Lotka-Volttera方程式3本の研究と同じ。

- 興味深い力学系の研究は行える。

  (例：Strange Attractorの発見, 分岐理論(Hopf分岐)など）

- しかし一般系からその条件を求めようと試みると、人間の手では困難に。
- →諦める or 個別具体的な議論を行うか。