時間遅れを持つReplicator方程式

吉川　満（J）
関西学院大学経済学研究科　D3
mitusurkikkawa@hotmail.co.jp

日本経済学会2007年秋季大会
（日本大学経済学部）

セッション: 数理経済学(9月24日(月)9:00-)

Ver 9/6

発表の流れ

1. イントロ　研究の目的･動機
2. 先行研究＋基礎概念
3. １本のReplicator方程式
4. ２本のReplicator方程式
   対称2人ゲーム(ジャンケンゲーム)
   非対称2人ゲーム(マッチング･ペニーゲーム)
5. 応用例:クモの巣理論
   離散型時間遅れ
   連続型時間遅れ
   非対称２人ゲームとしてのクモの巣理論
6. まとめ（結論･今後の課題）

目的

- 不確実な状況下どのような行動が起こるのか？
- 連続時間の時間遅れと離散時間の時間遅れの違い
- Hopf分岐を利用した対称2人、非対称2人ゲームでの時間遅れの導入
- 連続時間時間遅れのクモの巣理論への応用、伝統的なクモの巣理論との違い、非対称2人ゲームとしてのクモの巣理論の定式化

時間遅れとは

- ある一定の期前の影響が今期に影響を及ぼす。それを表すには、

１. **離散（Discrete） 時間**・・・数期前の影響が今期伝わる。

例）: Fibonacci 数列: $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}, F_1 = 1, F_2 = 1$

２. **連続（Continuous）時間**・・・ある一定の時間の後、その影響が伝わる。

例）: シャワー温度調節、車の運転

$$\dot{x} = -ax(t-\tau), \tau > 0$$

この微分方程式は解析的な分析が難しい。安定性は後述

時間遅れについての先行研究

内藤敏機, 日野義之, 原惟行, 宮崎倫子
『タイムラグをもつ微分方程式』牧野書店, 2002年.
室谷義昭氏(早稲田大学)
齋藤保久氏(Kyungpook National University)
… など。
→応用数学者が中心になって研究。

題材は数理生物学関係の話題が多い。

主に「Lyapunov関数を用いた、大域漸近安定の有無」の研究

経済学では

- 連続時間時間遅れは基本的にマクロ経済学で研究

  １．政策反応ラグ･･･即座には政府支出G↑→Y↑とはならない)。伝統的なマクロ経済学は波及効果についての時間の問題を無視している。

  Friedman(AER,1948)･･･政府による安定化政策は、政策反応ラグのために、資本主義経済の安定性を高めるどころか、むしろ不安定性を増幅させるであろう、ということを主張。

  ２．投資の懐妊期間･･･建設期間の存在。

定式化した例）:

- Kalecki(Econometrica,1935)
- 討論者の浅田統一郎氏（中央大経）:
- 吉田博之氏(日本大経)

最近では

- カオスの制御にも使われている。

例）: Pyragas(Physics Letters A,1992)･･･カオス的挙動を示す方程式系(Rossler系)に連続時間時間遅れを導入すると、安定な周期的な挙動を示す場合が存在する。

→Noise Induced Order（ノイズにより生成される秩序)の一種。

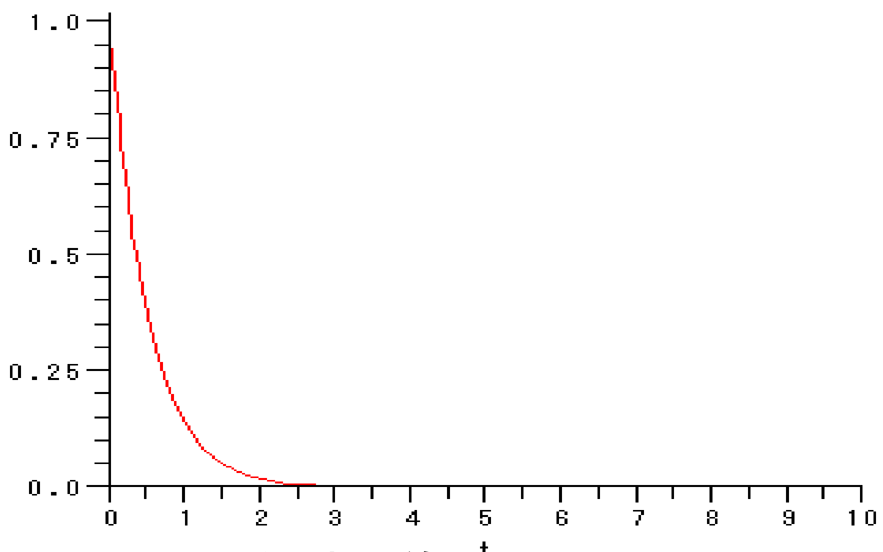
復習：時間遅れと振動性・不安定性

（1）　$\dot{x} = -ax \quad \Rightarrow \quad x(t) = Ce^{-at}$

任意定数CをC>0 として考えれば

- a < 0 ならば x(t) → ∞ (t → ∞).
- a > 0 ならば x(t) → 0　(t → ∞).

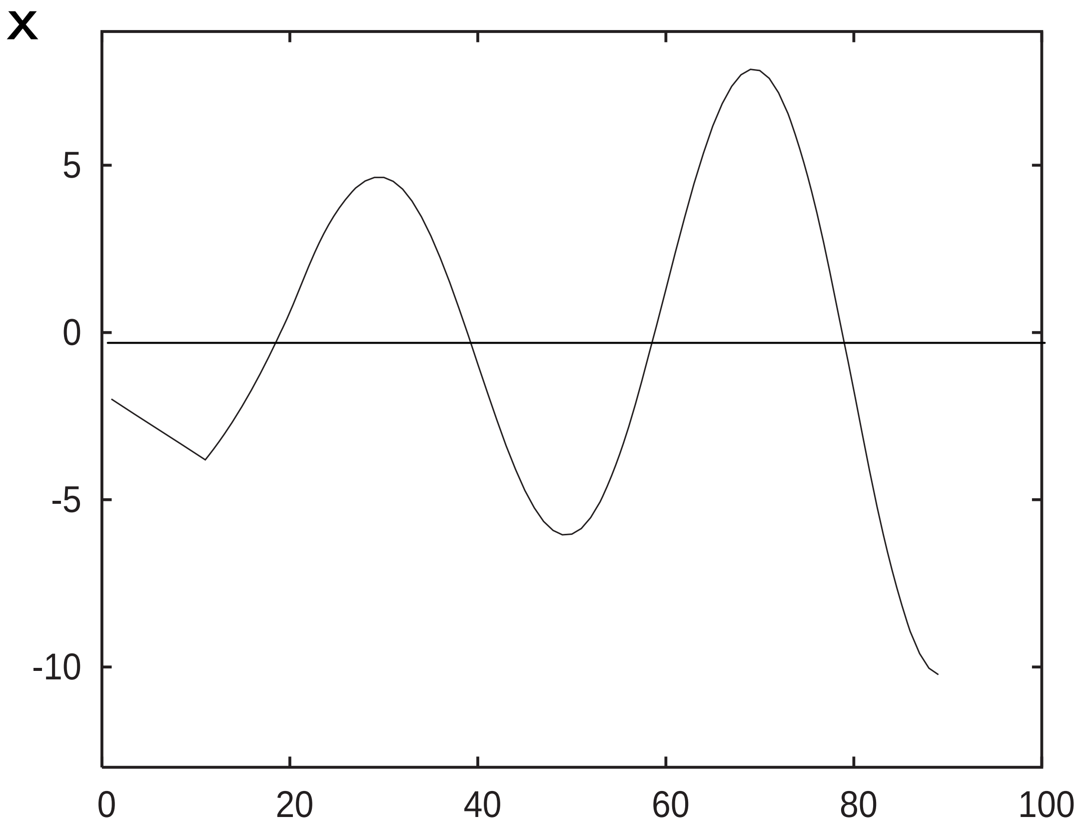
単調に



(1)の解軌道. C=1,a=2の場合.

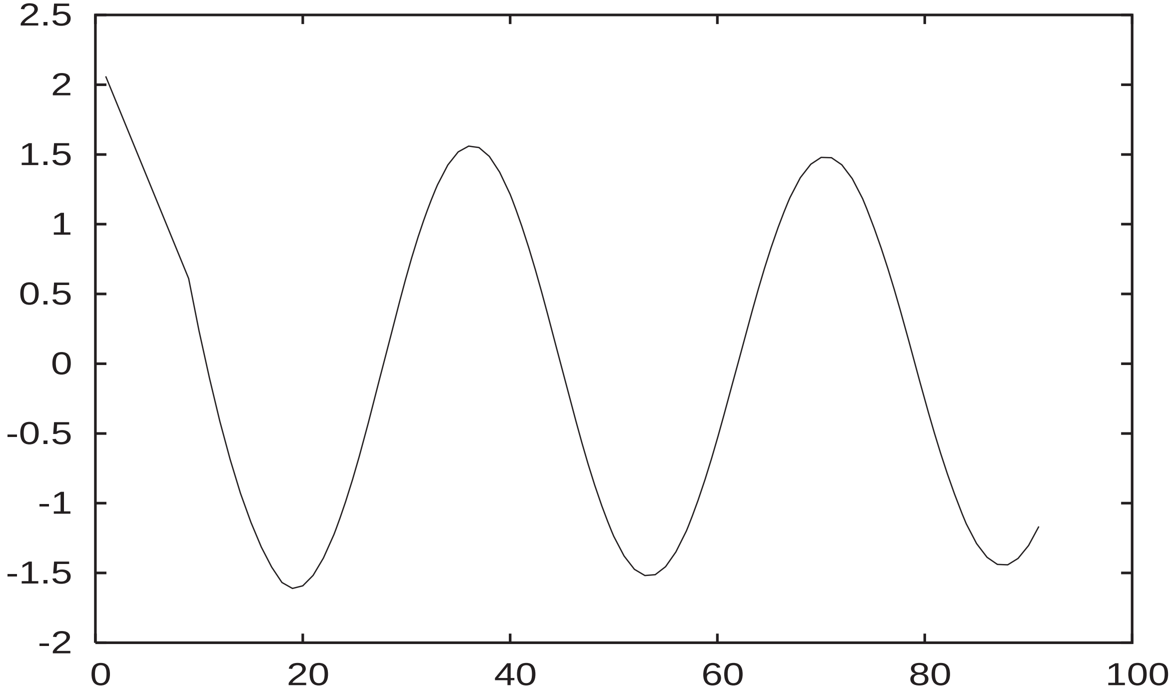
(1)に時間遅れ $\tau > 0$ を導入.

(2) $\dot{x} = -ax(t-\tau)$



振動しながら発散

(2)の解軌道. a=2, τ =1の場合.



振動

(2)の解軌道. a=2, τ =0.8の場合.

•(2)の漸近挙動について:

定理A. (2)の自明解が漸近安定 $\rightleftarrows 0 < a\tau < \dfrac{\pi}{2}$

定理B. (2)の全ての解が振動する. $\rightleftarrows a\tau > \dfrac{1}{e}$

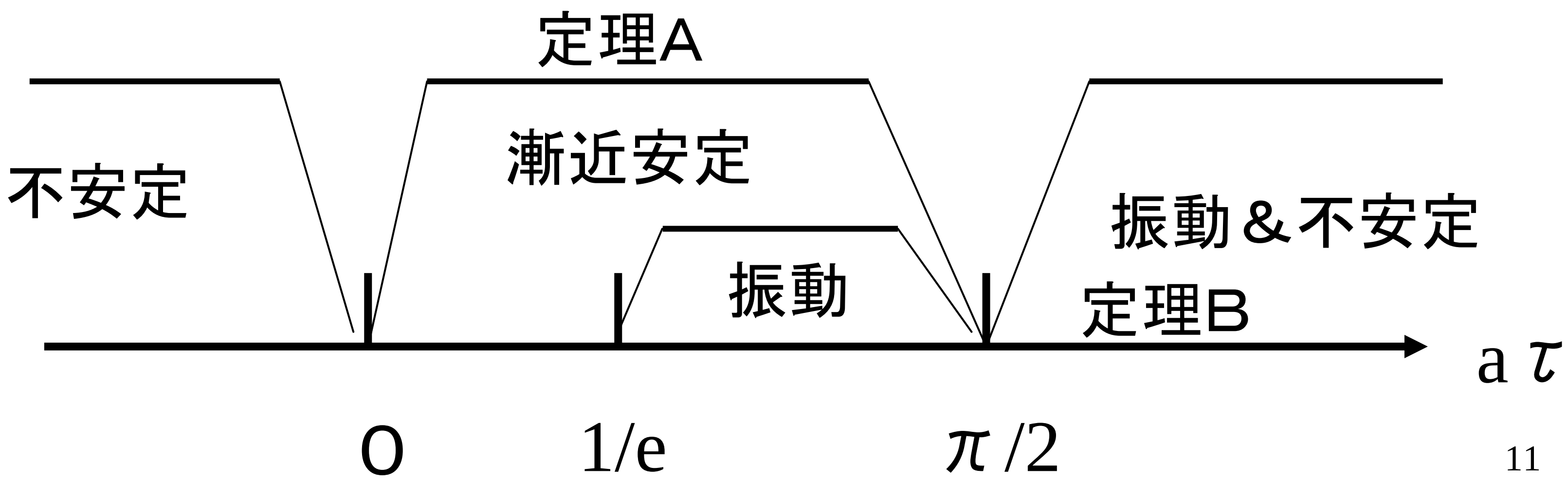
証明:(2)の特性根、すなわち

$$\lambda = -ae^{\lambda\tau}$$

の根について、定理Aはすべての根の実部が負となる、定理Bは実根を持たない条件を求める。

See　内藤他(2002)第1章

定理A、定理Bの結果を図示すると、



なせ、進化ゲーム理論に

- 数理生物学では時間遅れがあるLotka-Volterra方程式が精力的に研究されており、このLotka-Volterra方程式とReplicator方程式はある一定の関係がある。

→関連した研究が豊富、誰も行っていない。

しかし、LV系の研究の流れである、内点解の存在の有無は進化ゲーム理論ではそれは自明に近い。

またReplicator方程式はパラメーターが少なく、シミュレーションを行うのに便利。

→シミュレーションによる、均衡の選択に使えないか？

1本のReplicator方程式

利得行列 $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ のときReplicator方程式は次のようになる.

$$\dot{x}=\left\{(ax-(ax^2+by^2)\right\}xy$$

$$=\left\{\left(a+b\right)x-b\right\}x(1-x)$$

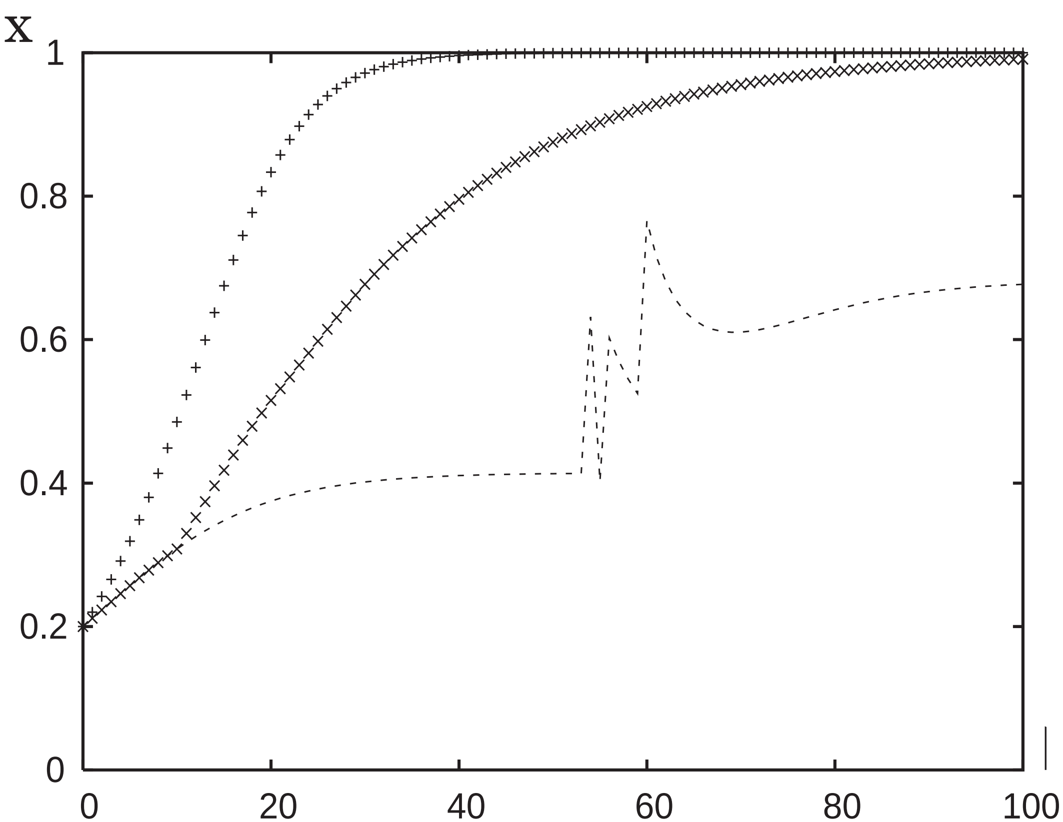
(A) **非ジレンマ型**　：　a> 0, b < 0
(B) **囚人のジレンマ型**：　a<0,b>0
（**C)** **コーディネーション型**: a>0,b>0
（**D)** **タカ･ハト型**:　a<0,b<0

	戦略1	戦略2
戦略1	a,a	0,0
戦略2	0,0	b,b

利得行列

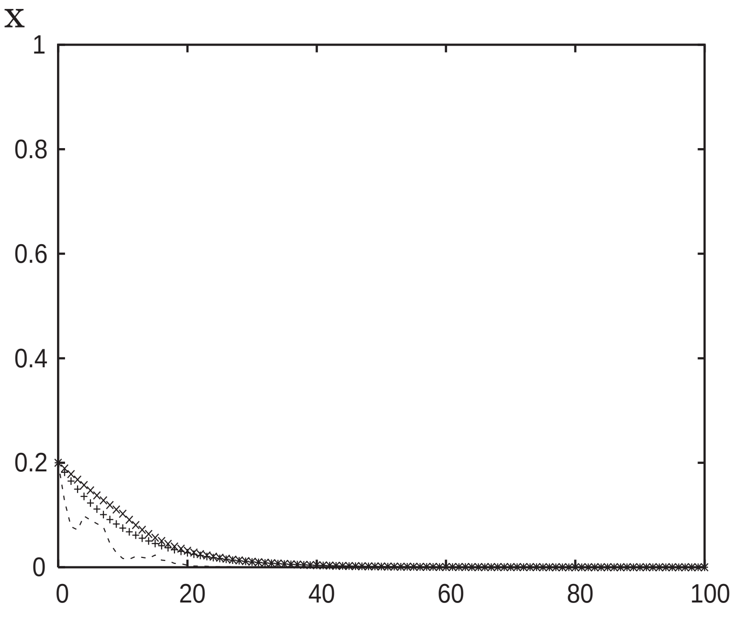
時間遅れがある1本のReplicator方程式

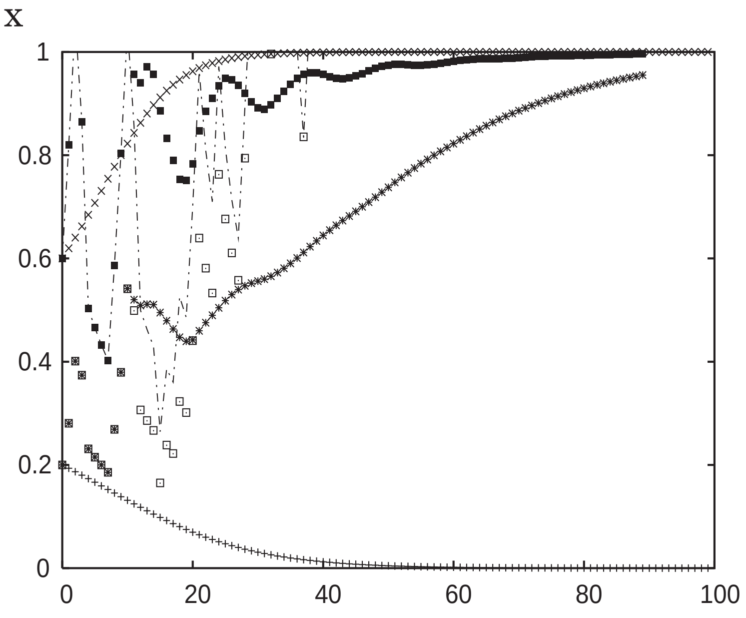
- 期待利得に時間遅れがある場合
- $$\dot{x} = \left\{ \underline{ax(t-r)} - \left(ax^2(t) + by^2(y) \right) \right\} x(t)y(t)$$



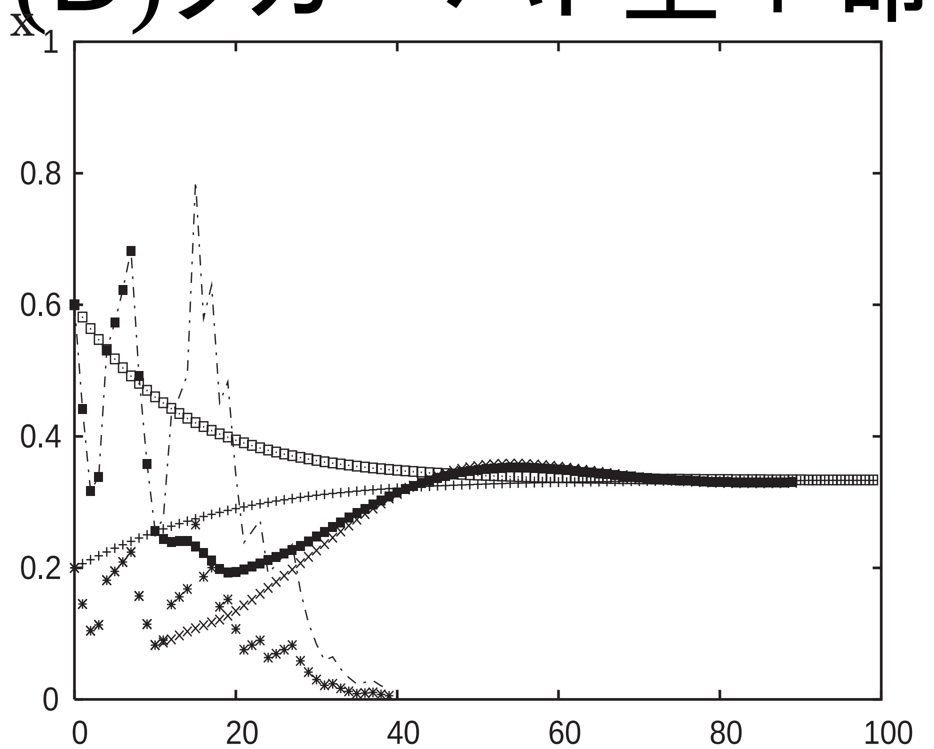
(A)非ジレンマ型

(B)囚人のジレンマ型(左)、(C)コーディネーション型(右)





(D)タカ＝ハト型＋命題1



命題1

時間遅れが存在するReplicator方程式において、均衡にその影響があるのは、大域的に不安定なゲーム(C)であるか、ESSが混合戦略のゲーム(D)の場合である。

時間遅れを持つ2本のReplicator方程式

- 対称2人ゲーム(一般化されたジャンケンゲーム(see Weibull(1995)))

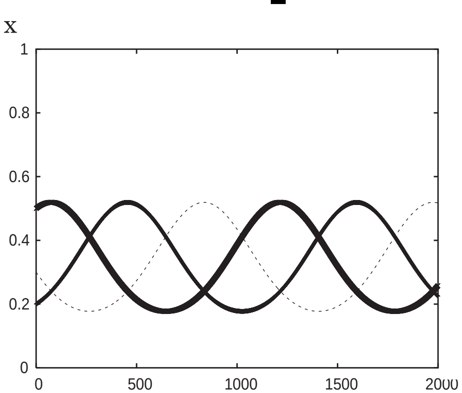
$$\dot{x}_1 = \left[x_1 + (2+a)x_2 - x \bullet Ax\right]x_1,$$

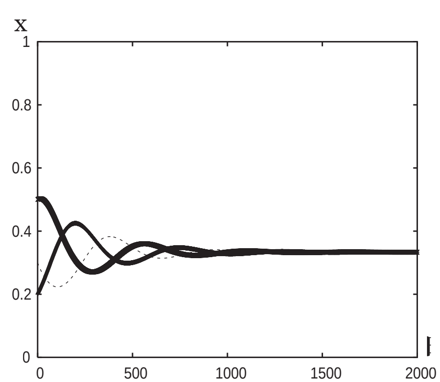
$$\dot{x}_2 = \left[x_2 + (2+a)x_3 - x \bullet Ax\right]x_2,$$

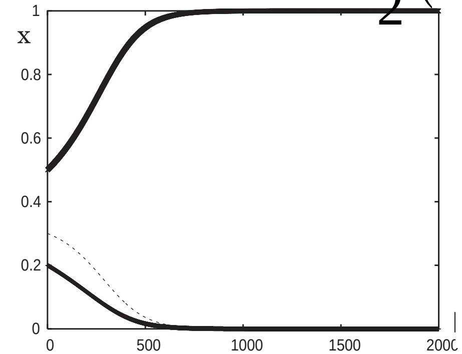
$$\dot{x}_3 = \left[x_3 + (2+a)x_1 - x \bullet Ax\right]x_3,$$

	s1	s2	s3
s1	1	2+a	0
s2	0	1	2+a
s3	2+a	0	1

where $\quad x \bullet Ax = 1 + \dfrac{a}{2}\left(1 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\right)$







a=0,a=-2,a=2(左、中、右)

時間遅れの存在

- ジャンケンに勝った場合得られる期待利得に時間遅れが存在する

$$\dot{x}_1 = \left[x_1 + 2\underline{x_2(t-r)} - x \bullet Ax \right] x_1,$$

$$\dot{x}_2 = \left[x_2 + 2\underline{x_3(t-r)} - x \bullet Ax \right] x_2,$$

$$\dot{x}_3 = \left[x_3 + 2\underline{x_1(t-r)} - x \bullet Ax \right] x_3,$$

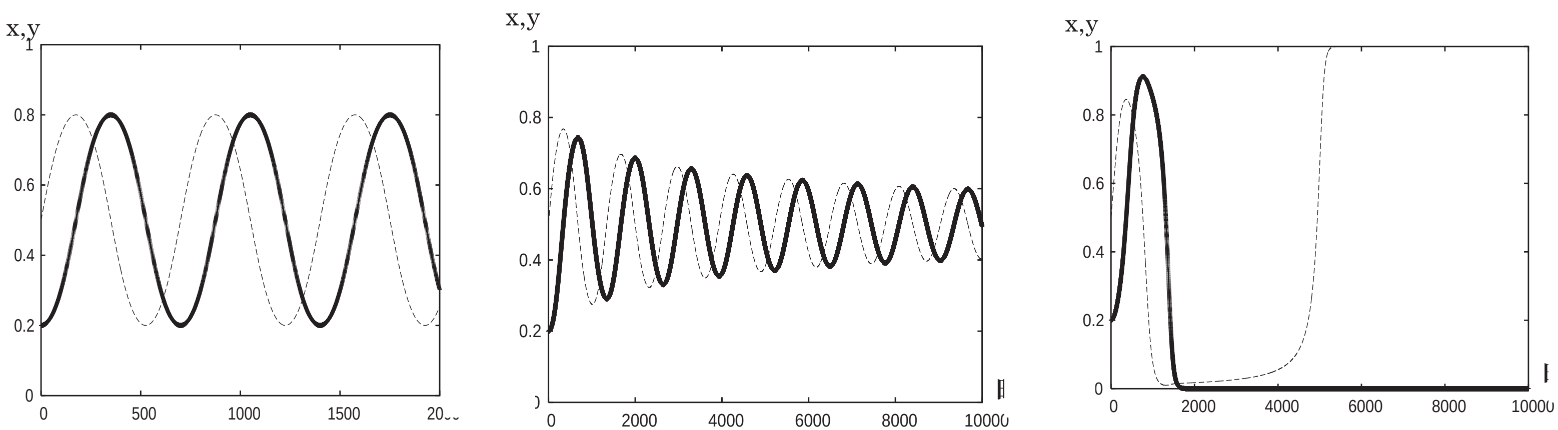
命題2

一般化されたジャンケンゲームにおいて、時間遅れを(4.2)のように導入する場合, $r = 0$のときはリミットサイクル、$x_i(t-r) < x_i, i=1,2,3$のとき漸近安定となり、$x_i(t-r) > x_i, i=1,2,3$ のとき発散していき、ある端点に行き着く。

非対称2人ゲーム

- マッチングペニーゲーム
  - $\dot{x} = a(x,y)(2y-1)(1-x)x,$
  - $\dot{y} = b(x,y)(1-2x)(1-y)y.$

	戦略1	戦略2
戦略1	2+c,c	c,2+c
戦略2	c,2+c	2+c,c



(左)a=2,b=2,(中)a(x,y)=1/[c+2[xy+(1-x)(1-y)]], b(x,y)=1/[c+2[x(1-y)+(1-x)y]],(右)a(x,y)=c+2[xy+(1-x)(1-y)],b(x,y) =c+2[x(1-y)+(1-x) y],c=0.001.

時間遅れの存在

- 発展・成長に時間遅れが存在

$$\dot{x} = 2(2y-1)(1-x)\underline{x(t-r_1)},$$

$$\dot{y} = 2(1-2x)(1-y)\underline{y(t-r_2)}.$$

命題3

マッチング・ペニーゲームにおいて、時間遅れを(4.5)のように導入した場合、このとき内点均衡はri=0 (i=1,2)のときは、リミットサイクル, x(t-r1)>x(t), y(t-r1)>y(t)のとき、漸近安定となる。またx(t-r1)<x(t), y(t-r2)<y(t)のとき、発散していき、端点解に行き着く。

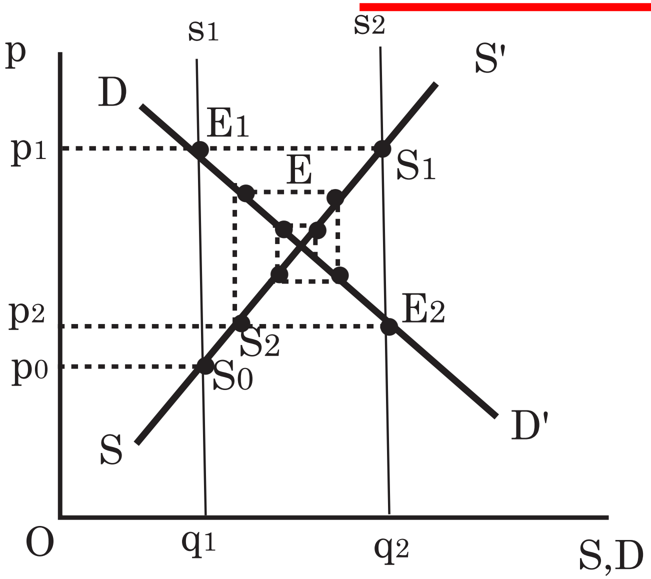
クモの巣理論

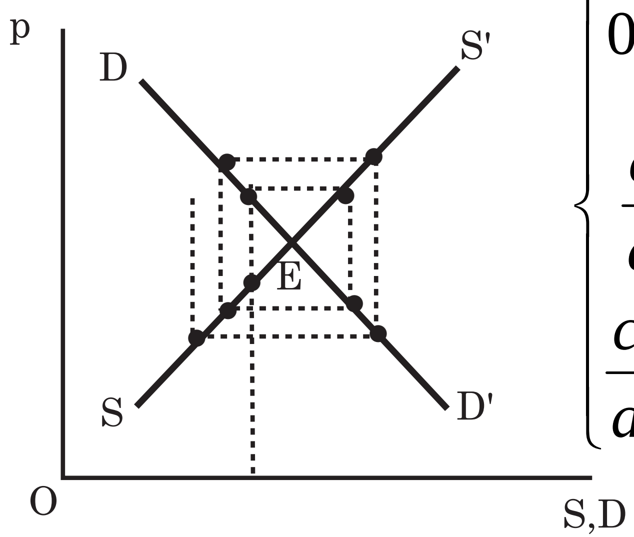
需要関数(DD')と供給関数(SS')

$$D_t = -aP_t + b, S_t = cP_{t-1} + d \qquad \text{where a,c>0}$$

このとき価格Pは次の方程式に従う

$$P_t = \frac{b-d}{a+c} + \left(-\frac{c}{a}\right)^t \left(P_0 - P^*\right)$$





$$\begin{cases} 0 < \dfrac{c}{a} < 1 : 安定(図,左) \\ \dfrac{c}{a} > 1 : 不安定(図,右) \\ \dfrac{c}{a} = 1 : ミットサイクル \end{cases}$$

時間遅れの存在

- 生産者は一定期前の価格を期待価格を形成し、生産量を決定する。ただしその価格は需要量と供給量の差から需要量の方が多ければ、価格を上げ、供給量の方が多ければ、価格を下げるというように適応的に調整していくとする。そこで消費者はその価格を見て、購入の選択を行うとする。

$$D(t) = -aP(t) + b, S(t) = cP^e(t) + d$$

ただし　$P^e(t) = P(t-r)$

$$\dot{p} = \{D(t) - S(t)\}\beta, \quad 0 < \beta < 1$$

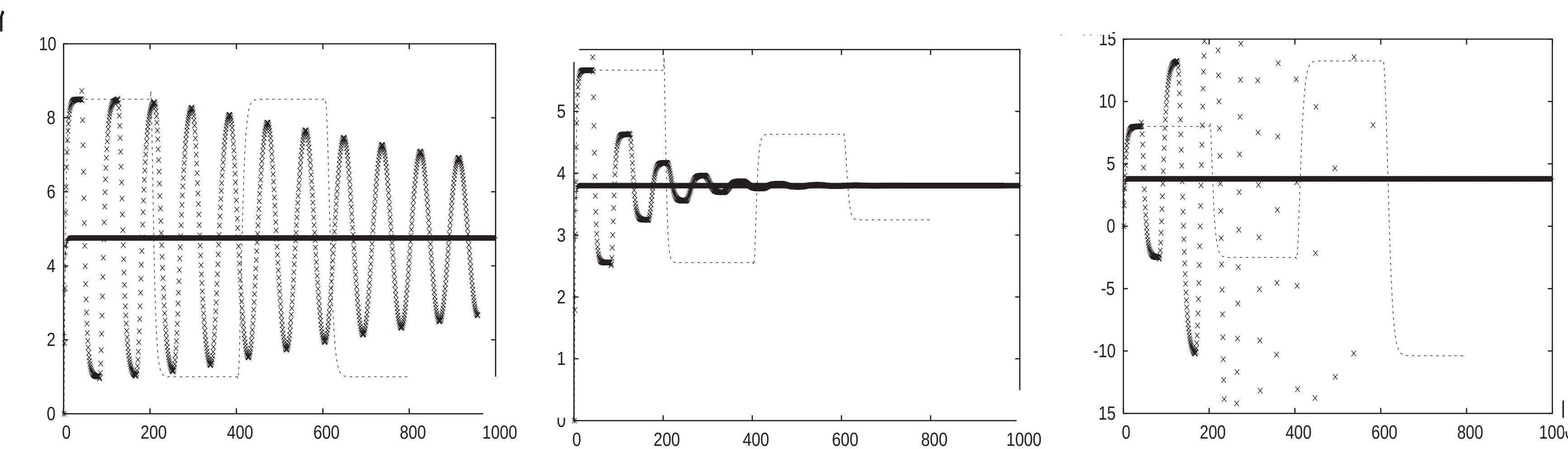
$$= \{b - d - aP(t) - cP(t-r)\}\beta$$

まとめ

命題4

$\dot{p} = \left\{ b - d - aP(t) - cP(t-r) \right\} \beta$ は $\dfrac{c}{a} = 1$ のとき時間遅れ τ が大きいとき周期解となり、$\dfrac{c}{a} < 1$ のとき、漸近安定となり、$\dfrac{c}{a} > 1$ のとき、発散する。

➡ 時間遅れが大きいときに離散時間のときと一致



時間遅れr=0,4,20のときの価格の動態,b=20,d=1,β =1.5,左：c/a=2/2, 中：c/a=2/3,右：c/a=3/2.

非対称2人ゲームとしてのクモの巣理論

- 平均的な売り手と平均的な買い手が何らかのゲームをしている.→前節までの結果と一致するためにはどのような条件が必要であろうか？
- 一般的なReplicator方程式

$$\dot{y} = y(1-y)\{a-(a+c)x\}$$

$$\dot{x} = x(1-x)\{d-(b+d)y\}$$

yを売り手が戦略1をとる確率、

xを買い手が戦略2をとる確率

買い手

売り手	戦略1	戦略2
戦略1	a,b	0,0
戦略2	0,0	c,d

内点解は次の条件のときリミットサイクルとなる

$$\frac{abcd}{(a+c)(b+d)} < 0$$

時間遅れの存在

- 利得構造に時間遅れを導入

$$\dot{y} = y\left(1 - y(t-r)\right)\left\{a - (a+c)x(t-r)\right\}$$

$$\dot{x} = x\left(1 - x(t-r)\right)\left\{d - (b+d)y(t-r)\right\}$$

- 特性方程式は,

$$\det(\lambda I - Ae^{-\lambda r}) = \begin{vmatrix} \lambda & -\dfrac{bd(a+c)}{(b+d)^2}e^{-\lambda r} \\ -\dfrac{ac(b+d)}{(a+c)^2}e^{-\lambda r} & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 - \frac{abcd}{(a+c)(b+d)}e^{-2\lambda r} = 0$$

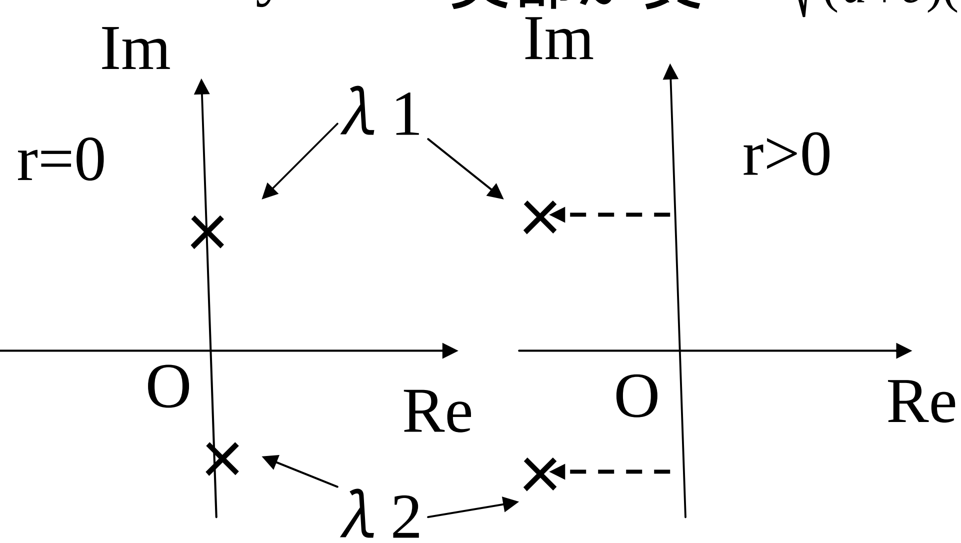
- この解は複素平面上のどこに分布するのか？

$$\frac{d\lambda}{dr} = \frac{abcd\lambda e^{-2\lambda r}}{(a+c)(b+d)\lambda - abcdre^{-2\lambda r}}$$

- 特に r=0 のとき, $\lambda = \pm\sqrt{\dfrac{abcd}{(a+c)(b+d)}}$ である. このときの解の動きを調べると,

$$\left.\frac{d\lambda}{dr}\right|_{\substack{r=0 \\ \lambda=\pm\sqrt{\frac{abcd}{(a+c)(b+d)}}}} < 0$$

Limit cycle　　実部が負



$\downarrow$

実部が負となるものの存在

命題5 $\downarrow$

漸近安定な内点均衡の存在

まとめ

- 構造不安定なゲームに時間遅れを入れると、均衡選択の問題が発生する(命題1).
- ジャンケンゲーム, マッチングペニーゲームにおいて時間遅れが存在する場合Hopf分岐の構造となる(命題2,3).
- クモの巣理論を連続型時間遅れがある微分方程式で定式化し、離散時間の結果と一致するのは、時間遅れが大きい場合であった(命題4).
- クモの巣理論を一般的な非対称2人ゲームにおいて記述し、その結果が一致する場合の条件を導出した(命題5)。またEzekiel(QJE,1938)でも時間遅れの大きさ(2年のラグならばリミットサイクル、3年ならば漸近安定)によっても同様の主張を得る。

今後の方向性

- シミュレーションがより身近に
- 低次元の微分方程式論は研究することがなくなる。

→そこで時間遅れの導入がこれから研究されるだろう。（ただし数理構造は高度な知識が必要。）

- 応用例：

１．経済成長：資本部門にラグ→周期軌道の存在

２．Policy Lag

例）１．、２．は共に浅田(1997)「成長と循環のマクロ動学」日本経済評論社, 第2章と第5章)に関連

３．金融の動学的非整合性(time inconsisitency)の問題

このファイルは、以下のアドレスにおいています。

関西学院大学大学院経済学研究科研究会WEBの「学会報告のレジュメ等」にあります。

http://members.ld.infoseek.co.jp/kgu-gse/gakkai/gakkai.htm

からDownloadableです.

終