統計力学を用いた進化ゲーム理論

(Evolutionary Game Theory with Statistical Mechanics)

吉川 満 (J)

(Graduate School of Economics, Kwansei Gakuin University, 大学院研究員)

E-mail:mitsurukikkawa@hotmail.co.jp, URL: http://kikkawa.cyber-ninja.jp/index.htm

ABSTRACT: 進化ゲーム理論を統計力学を用いて定式化を行った. 具体的には最近接の人とのみ, ランダムにマッチングする状況を統計力学で最も単純な Ising モデル, SK モデルを参考に定式化した. そこで均衡 (戦略の一致) という概念は相転移を利用して生成するとした. その結果あるパラメータの大きさによって, 伝統的な進化ゲーム理論と一致する場合としない場合があることが分かった. また無限人のゲームでは均衡 (戦略の一致) は存在しないことが分かった. また均衡が生成していないパラメータ領域では Percolation を用いて, より詳しく戦略の分布について考察した. さらに外部性 (周辺のゲームに影響) を考慮したものを導出し, Quenched 系において多重均衡が生じていることを示した.

INTRODUCTION

MOTIVATION

1. 様々な主体 (heterogenutiy) がいるモデルを分析したい.
2. Nash 均衡: (i) **規範的理論**(prescriptive theory) :「合理的な行動」の結果
(ii) **記述的理論**(descriptive theory) :「大多数の行動 (mass action)」の結果.
3. 既存の進化ゲーム理論では解析不可能に.
4. 空間的に分布している主体が一斉にゲームを行い, どの程度戦略が一致しているのかを秩序パラメータを用いて, ゲームの記述 → 統計力学(statistical mechanics).

RESULT

1. 変数によって既存の進化ゲーム理論と一致する, しない場合が存在する. 具体的には利得が高ければ, 確率 1 である戦略を選択するというものを, 変数との積 によって, ある戦略を選択する確率が決まるとした.
2. このモデルは実験経済学やエージェント ベースド シミュレーションの理論として位置づけることができる.

RELATED LITERATURES

Blume [2](Ising model), Diederich and Opper [4] (SK model).

MODEL

基本構造・最近接相互作用 (Ising Model)

設定 非常に多くの主体がおり, その各主体は図 1(左) のように格子上におり, 最近接の相手, ランダムマッチング し, 2 つの戦略でゲームを行う.

仮定 1. 各主体は高い利得・適応度を得ることを望んでいる.

命題 1. 仮定 1 のもとでの主体 x のある戦略 $\{S_i\}, i=1,\cdots,N$ を取り, ある利得 f を得るというゲームの状況下に戦略 $\{S_i\}$ の確率分布は次のようになる.

(2.1) $$P(\{S_i\}) = Z^{-1}\exp(\gamma f).$$

ただし $\{S_i\}$ は主体 i の戦略, γ は変数, f はある戦略 $\{S_i\}$ を取ったときの利得・適用度, Z は規格化定数を表している.

定義 1. 戦略が一定の秩序を持っているかどうかを判断する量を**秩序パラメータ**(order parameter) という概念を次のように導入する.

(2.2) $$m = \left\langle S_i \right\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} S_i \equiv \Big(\sum_i S_i P(\{S_i\})\Big).$$

ただし $\langle\ \rangle$ は平均を表している.

EXAMPLE

1 ＼ 2	戦略 1(+1)	戦略 2(+2)
戦略 1(+1)	a,a	0,0
戦略 2(+2)	0,0	b,b

利得表 1

1 ＼ 2	戦略 1(−1)	戦略 2(+1)
戦略 1(−1)	a,a	0,0
戦略 2(+1)	0,0	b,b

利得表 2

戦略の添え字が $\{1,2\}(\{-1,+1\})$ の場合: 戦略 1 を確率 1 で採用する場合,$m=1(-1)$, 戦略 2 を確率 1 で採用する場合,$m=2(+1)$, 戦略 1 と戦略 2 をランダムに採用する場合,$m=\frac{3}{2}(0)$.

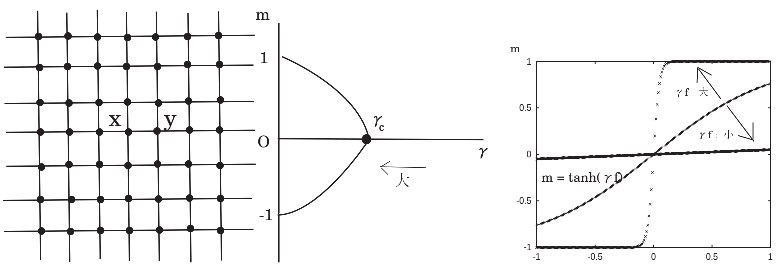

図 1 : (左) 2 次元正方格子と最近接格子点の例. 要素 (x,y) は主体を表している. (中) 例: Ising モデルにおける変数 γ と秩序パラメータ m との関係, (右) 秩序パラメータ m と変数と利得の積 γf との関係.

定義 2. $x\in\Delta$ が**進化的に安定な戦略**(Evolutionary Stable Strategy: ESS) であるとは, どのような戦略 $y\neq x$ に対しても, ある $\bar{\epsilon}_y\in(0,1)$ が存在し, すべての $\varepsilon\in(0,\bar{\epsilon}_y)$ について次の不等式が成り立つことをいう.

(2.3) $$u\big[x,\varepsilon y+(1-\varepsilon)x\big] > u\big[y,\varepsilon y+(1-\varepsilon)x\big].$$

命題 3. 統計力学を用いた進化ゲーム理論における進化的に安定な戦略とは次の条件を満たす.

(2.4) $u(y,x)\le u(x,x), \quad \forall y,$ (*Equilibrium Condition*)

(2.6) $|m-m^*|<\varepsilon.$ (*Stability Condition*)

ただし m^* は戦略の添え字を示している.

戦略が一致しない場合

定理 1. (Coniglio, *et al.* [3]) 2 次元 Ising モデルにおいて, $\mu^s, s=\{+,-\}$ を平衡における (s) 不変確率測度として, 次の関係が成り立つ.

(i) $\gamma>\gamma_c$ のとき

$$\mu^+_{\gamma,0}(\{|C_0^+|=\infty\})>0,\qquad \mu^-_{\gamma,0}(\{|C_0^-|=\infty\})>0.$$

(ii) Gibbs 分布の全体 $\mathcal{G}(\gamma,h)$ の任意の端点 μ に対して

$$\mu(|C_0^+|=\infty)\mu(|C_0^-|=\infty)=0.$$

定理 2. (樋口 [5]) $\gamma>0$ が十分小で, h が $\gamma' h' < \frac{1}{2}\log\frac{p_c}{1-p_c}-4\gamma'$, $\gamma h > \frac{1}{2}\log\frac{1-p_c}{p_c}+4\gamma$ を同時に成立させるとき, $\mu_{\gamma,h}$ に関して確率 1 で無限 $*$ クラスターの共存が起こる.

Random Matching (Spin Glass)

命題 4. 戦略が 2 つ持っている主体がランダムマッチし, 格子上を自由に動けるという Annealed 系 において, 期待利得を最大にするような秩序パラメータは点で表される. 特に主体の数が無限の場合では秩序パラメータは 0 となるということが分かった.

命題 5. 戦略が 2 つ持っている主体がランダムマッチし, 格子上を自由に動けないという Quenched 系 において, 期待利得を最大にするような秩序パラメータは tanh の関数で表される.

命題 6. 各主体は周りを見ることができ, 周りの影響によっても利得が変化し (外場の存在), Quenched 系の場合に秩序パラメータ m の非連続な変化, 分岐が起り, 多重解を持つ (図 2(右)).

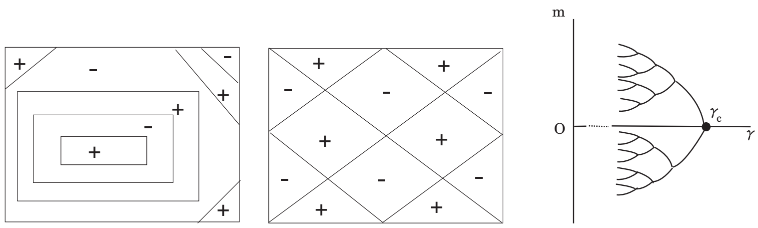

図 2 : (左) 同心円パターン, (中) チェス盤パターン, (右) 秩序パラメータの分岐と多重解

SUMMARY

1. 最も簡単な最近接の人とのみの場合は均衡は 3 つあり, 戦略の添え字が $\{-1,1\}$ の場合 (利得表 2), 秩序パラメータは tanh の関数となった.
2. Percolation が存在していない場合は戦略の分布は同心円パターンか, チェス盤パターンが考えられ, 特に γ が十分小さい場合無限 $*$ クラスターの共存が存在していることが分かった (定理 2).
3. 各主体が自由に移動することができる Annealed 系の場合 Replicator 系と同様に均衡は 3 つあり, 秩序パラメータは点で表され, 無限人経済の場合秩序パラメータはランダムな場合しか存在しないことが分かった (命題 4).
4. 相互作用が当初から決まっており, 各主体が自由に移動することができない Quenched 系の場合は Ising type のモデルと同様に秩序パラメータは tanh の関数となった (命題 5).
5. 外部性が存在する場合, Ising Type や Annealed 系では外部性が存在しない場合と変わらないが, Quenched 系において多重均衡が生じていることが分かった (命題 6).

FUTURE WORKS

1. 統計力学の持つ空間性に着目する. 非 Ergodic 性に着目し, Network 形成の議論へ.
2. 重要な変数 γ の内生化 (→ 超統計 (superstatistics)[1], 元来は非平衡系のモデルで使用).
3. 可視化 → Gillespie の方法 (離散性に着目)

REFERENCE

[1] Beck C. and Cohen E.G.D.: "Superstatistics," *Physica A*, Vol. **322** (2003), pp. 267-275.

[2] Blume, L. E.: "The Statistical Mechanics of Strategic Interaction," *Games and Economic Behavior*, Vol.**5** (1993), pp. 387-424.

[3] Coniglio,A., Nappi, C. R., Peruggi, F. and Russo, L.: "Percolation and phase transitions in the Ising model," *Communications in Mathematical Physics*, Vol. **51** (1976), pp. 315-323.

[4] Diederich, S. and Opper, M.: "Replicators with random interactions: A solvable model," *Physical Review A*, Vol.**39** (1989), pp. 4333-4336.

[5] 樋口保成: 「イジングモデルのパーコレーション」数学, Vol.**47** (1995), pp. 111-124.

[6] Lanford III, O.E. and Ruelle, D.: "Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics," *Communications in Mathematical Physics*, Vol. **13** (1969), pp. 194-215.