2009 Japanese Economic Association Spring Meeting at Kyoto University, 2009/06/06 10:10-10:40

完全記憶がある確率的進化ゲーム理論 (Stochastic Evolutionary Game Theory with Perfect Recall)

Mitsuru KIKKAWA

(**Department of Science and Technology, Meiji University**)

mitsurukikkawa@hotmail.co.jp

THIS FILE IS AVAILABLE AT

http://kikkawa.cyber-ninja.jp/

OUTLINE

1. Introduction (Motivation, Purpose)
2. Related Literatures and Review
3. Stochastic Evolutionary Game Theory
   3-1. Markov Chain
   3-2. Perfect Memory (Martingale)
4. Summary (Future works)

1. INTRODUCTION

1. Introduction (Motivation, Purpose)
2. Related Literatures and Review
3. Stochastic Evolutionary Game Theory
   3-1. Markov Chain
   3-2. Perfect Memory (Martingale)
4. Summary (Future works)

OUR CONTRIBUTIONS

- 進化ゲーム理論を確率論の枠組みで定式化し、その性質を利用し、分析した。(METHOD, SEE Next SLIDE)

- Nowak(1990, TPB)はゲーム理論を<u>時間に一様なMarkov連鎖</u>を用いて定式化し、分析。

- 本報告ではゲーム理論を<u>時間に非一様なMarkov連鎖</u>を用いて定式化し、分析。Nowak(1990)をより一般化。

  解釈）それを過去の全ての行動に依存するに拡張した場合を分析。

  数理）積に関するWaldの等式

  例）戦略の数(有限)が多いゲーム。

Method

- Step1) This game is a **Martingale** or not.

→Yes

- Step 2) Apply **Optimal Stopping Theorem** (Stopping time is finite)
- Step 3) Derive **Wald 's equation**
- Step 4) Derive a **Nash Equilibrium**.

2. Related Literatures and Review

1. Introduction (Motivation, Purpose)
2. Related Literatures and Review
3. Stochastic Evolutionary Game Theory
   3-1. Markov Chain
   3-2. Perfect Memory (Martingale)
4. Summary (Future works)

MAJOR REFERENCES

- **河野敬雄** (2003): **「進化ゲームアラカルト – 確率論の立場から –」**『*Rokko Lectures in Mathematics*』, **13**. [PDF]

→**確率論の立場**(Kolmogorov**の公理系**)**で様々なモデルを分析。**

- Nowak, Martin A. (1990): "Stochastic Strategies in the Prisoner's Dilemma," *Theoretical Population Biology*, Vol.**38**, pp.93-112. [PDF]

→**囚人のジレンマゲームを**Markov Chain **として記述し、一般的な性質を導出。ノイズを導入し、**ESS**の存在を証明。**

Martingale

Repeated Game:

- Fudenberg, Drew and Levine, David K. (1992): *The Review of Economic Studies*, Vol.**59**, No. 3, pp. 561-579. [HP]
- Mailath, G. J. and Samuelson, L.(2006): *Repeated Games and Reputations - Long-Run Relationships*, Oxford University Press. [HP]

Stochastic Game:

- Aumann, Robert J. and Maschler, Michael B. with the collaboration of Richard B. Stearns (1995): *Repeated Games with Incomplete Information*, MIT Press. [HP]
- Sorin, Sylvain (2002): *A First Course on Zero-Sum Repeated Games*, Springer-Verlag. [HP]

→**これらの先行研究とは異なり、最も基本的なゲームがマルチンゲールであるかどうかを調べた。**

Martingale に関する準備

Definition. A sequence $X=\{X_n; n \geqq 0\}$ is a **martingale** with respect to the sequence $F=\{F_n; n \geqq 0\}$ if, for all n $\geqq$ 0,

(i) $E(|X_n|)<\infty$

(ii) $\{F_n\}$ is filtration, $\{X_n\}$ is adapted for $\{F_n\}$.

(iii) $E(X_{n+1} \mid F_n) = X_n$ a.s. , $\forall\ n \geqq 0$

一種の合理的期待

In (iii), if "=" can be replaced "$\leqq$", we call the pair $\{X_n, F_n ; n \geqq 0\}$ a supermartingale, and "$\geqq$", we call the pair $\{X_n, F_n ; n \geqq 0\}$ a submartingale.

Proposition. Markov Chain is a Martingale.

定理 (**マルチンゲールの収束定理**) $\{X_n, \mathcal{F}_n ; n \geqq 1\}$ **が劣マルチンゲールで** $\sup_n E(X^+_n) < \infty$ **を満たしているとすると**, $n \to \infty$ **のとき**, $\{X_n\}$ **は** $E(|X|) < \infty$ **を満たす極限**X**に概収束する**.

Definition. A random variable n taking values in $\{0,1,2,\ldots\} \cup \{\infty\}$ is called a **stopping time**, or **Markov times** with respect to the filtration $\{\mathcal{F}_n \mid n \geqq 0\}$ if $\{\omega \mid N(\omega) = n\} \in \mathcal{F}_n$, $\forall n \geqq 0$.

定理 (**任意抽出定理**) $(X_k, \mathcal{F}_k)$**を劣マルチンゲール**, T_k, $k=1,2,\ldots$ **を**$\mathcal{F}_n$- **停止時間とする**. T_k **は有界**$T_k \leqq m_k$, **かつ**, **増大** $T_k < T_{k+1}$, $k=1,2,\ldots$ **とする**. Y_k**を**

$$Y_{k(\omega)} \equiv X_{T_k(\omega)}(\omega),\ k=1,2,\ldots$$

と定義すれば, (Y_k, F_{T_k})**も劣マルチンゲールである**.

Theorem. Let $(Y, \mathcal{F})$ be a martingale, and let T be a stopping time. Then $E(Y_T) = E(Y_0)$ if the following holds:

a) $P(T<\infty) = 1$, $E(T) < \infty$

b) there exists a constant c such that

$$E(|Y_{n+1} - Y_n| \mid \mathcal{F}_n) \leqq c, \text{ for all } \forall n < T.$$

- **Wald's equation** Let $X_1, X_2, \ldots$ be independent identically distributed random variables with fintie mean μ, and let $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. We obtain the follows.

$$E(S_T) = \mu E(T).$$

for any stopping time T.

3. Stochastic Evolutionary Game Theory

Markov Chain

- Markov Chain = game in extensive form
- Behavioral strategy (but we don’t analyze the relation between a mixed strategy and behavioral strategy)
- **(Ω,*F*,P) を確率空間とし, Ωは空間, *F*は空間Ωの部分集合の族, P は (Ω,*F*) 上の確率とし、確率変数は戦略の集合とする。**

- **展開形ゲーム：** Γ = (K , P, p, U, h)
- K:**ゲームの木**, P: **プレイヤーの分割**, p: **偶然手番の確率分布族であり, 確率変数**, U : **情報分割**, h: **利得関数**
- **このとき**, $F_n \in U$, n≧ 0 **となる**.

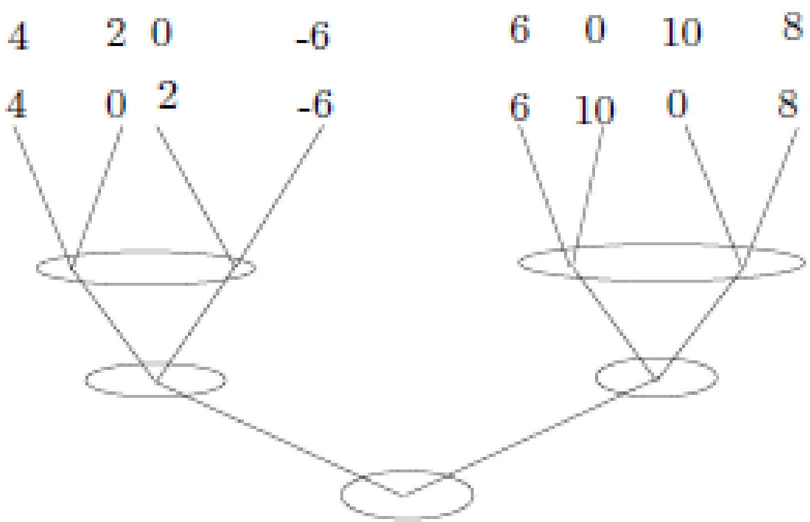


図 1. 展開形ゲームの例

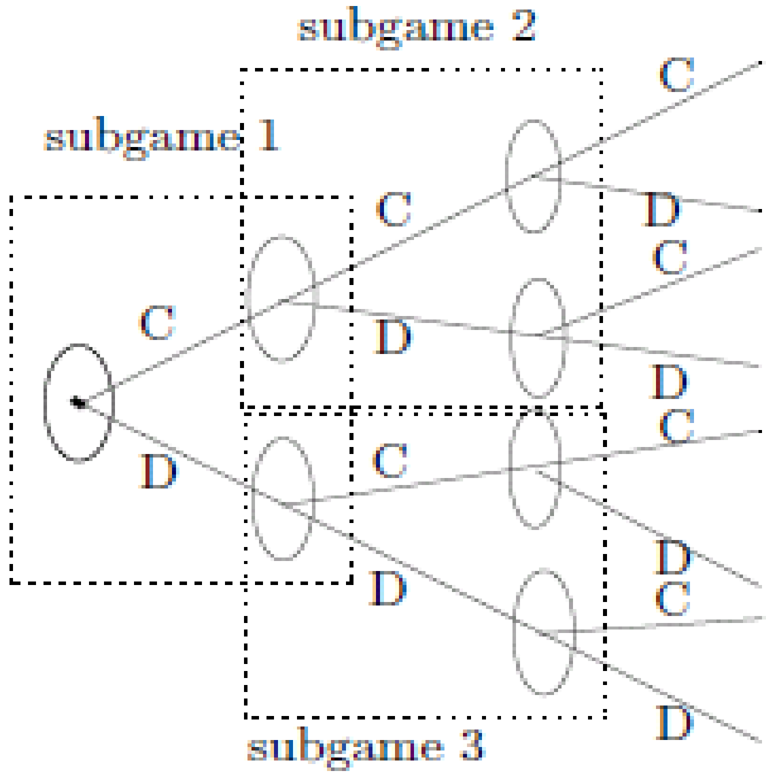


図 2. Markov 連鎖としてのゲーム

確率過程に関する事項

定義10

$P(X_n=j \mid X_{n-1}=i) = P^{(n)}{}_{ij}$, $P^{(n)}=(P^{(n)}{}_{ij})$, $n=1,2,\ldots,N$

$P^{(n)}$ をステップ $n-1$ における**推移確率行列**という．よって$P^{(n)}$は状態空間Sの要素の数をNとすると，N次正方行列である．

定義11 $P^{(n)}$がn に依存しないとき，**時間的に一様なMarkov連鎖**という．

戦略が2つの場合

- **設定**: **プレイヤー：**I、II。**純粋戦略の集合**S={C,D}, $Z_n=(X_n,Y_n)$; n=0,1,… **は** S×S **の値を取る時間的に一様な** Markov**連鎖とする。**
- **このときの推移確率行列**P(**各状態は**(C,C),(C,D),(D,C),(D,D)**の順に並んでいる。例** $Z_n(\Omega)=(C,D)$ **は根元事象**Ω**において**, n**回目にプレイヤー**I**が戦略**C**を出し、プレイヤー**II**が戦略**D**を出したことを意味する。**

$$P=\begin{pmatrix} pp' & p(1-p) & (1-p)p' & (1-p)(1-p') \\ qp' & q(1-p') & (1-q)p' & (1-q)(1-p') \\ pq' & p(1-q') & (1-p)q' & (1-p)(1-q') \\ qq' & q(1-q') & (1-q)q' & (1-q)(1-q') \end{pmatrix}$$

- p**または**q**はプレイヤー**II**が直前にそれぞれ**C**または**D**を出した時、プレイヤー**I**が**C**を出す条件付き確率である。**

Column
に着目

合

ヤ II。 略の集合 ,D},

Zn=(Xn, 0, S×S を取る時 に一様な Markov連 す

- このと 移 行列P 様は(C,C ,(D,C), (D,D)の 並ん る。例 =(C,D) 元事象Ω において 目 イヤ 戦略Cを プレイヤーIIが戦略Dを出したことを意味する。

今期の両プレイヤーの戦略(C,C)

今期のそれぞれのプレイヤーの戦略(C,D)

今期のそれぞれのプレイヤーの戦略(D,C)

今期の両プレイヤーの戦略(D,D)

$$P=\begin{pmatrix} pp' & p(1-p') & (1-p)p' & (1-p)(1-p') \\ qp' & q(1-p') & (1-q)p' & (1-q)(1-p') \\ pq' & p(1-q') & (1-p)q' & (1-p)(1-q') \\ qq' & q(1-q') & (1-q)q' & (1-q)(1-q') \end{pmatrix}$$

- pまたはqはプレイヤーIIが直前にそれぞれCまたはDを出した時、プレイヤーIがCを出す条件付き確率である。

Rowに着目

…が2つの場合

前期の両プレイヤーの戦略(C,C)

前期の各プレイヤーの戦略(C,D)

前期の各プレイヤーの戦略(D,C)

前期の両プレイヤーの戦略(D,D)

$$\begin{pmatrix} \ldots p' & p(1-p) & (1-p)p' & (1-p)(1-p') \\ \ldots & q(1-p') & (1-q)p' & (1-q)(1-p') \\ pq' & p(1-q') & (1-p)q' & (1\ldots \\ qq' & q(1-q') & (1-q)q' & (1\ldots \end{pmatrix}$$

- pまたはqはプレイ…それぞれCまたはDを出した時、…を出す条件付き確率である。

EXAMPLE

2つの場合

イヤー：I、II。純粋戦略の集合S={C,D},

Zn=(Xn,Yn); n=0,1,… はS×Sの値を取る時間的に一様なMarkov連鎖とする。

- このときの推移確率行列P(各状態は(C,C),(C,D),(D,C),(D,D)の順に並んでい … は根元事象Ωにおいて, n回目にプ … 出し、プレイヤーIIが戦略Dを出し …

前期各プレイヤーの戦略(C,D)であり、今期の各プレイヤー戦略は(D,C)

$$P=\begin{pmatrix} pp' & p(1-p') & (1-p)p' & (1-p)(1-p') \\ qp' & q(1-p') & (1-q)p' & (1-q)(1-p') \\ pq' & p(1-q') & (1-p)q' & (1-p)(1-q') \\ qq' & q(1-q') & (1-q)q' & (1-q)(1-q') \end{pmatrix}$$

- pまたはqはプレイヤーIIが直前にそれぞれCまたはDを出した時、プレイヤーIがCを出す条件付き確率である。

- **初期分布**: {C,C }, {C,D }, {D,C }, {D,D}

$$\pi_0 = \left(yy', y(1-y'), (1-y)y', (1-y)(1-y')\right)$$

y, y': **プレイヤー**I, II **は互いに独立に**C**をそれぞれ出す確率。**

- **利得関数**: f(C,C)=A, f(C,D)=0, f(D,C)=0, f(D,D)=B
- **利得表**1

	戦略C	戦略D
戦略C	A, A	0,0
戦略D	0,0	B,B

対称2**人ゲーム**

- **極限あり** **極限なし**

$$u(\vec{a},\vec{b}) = \lim_{n\to\infty} E_{\pi_0}[f(X_n,Y_n)],\quad u(\vec{a},\vec{b}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} E_{\pi_0}[f(X_n,Y_n)]$$

命題1 (Nowak[18]を変更)

(i) |rr’|<1 の時, Markov**過程は既約**, **非周期的であって、定常分布は** $\pi=\left(ss', s(1-s'), (1-s)s', (1-s)(1-s')\right)$**に収束する**.

このとき利得関数は次の値に収束する。

$$u(\vec{a},\vec{b}) = Ass'+B(1-s)(1-s')$$

(ii) r=r’=1 の時, Markov**過程は状態**(C,C)**と**(D,D)**がそれぞれ定常分布であり**, (C,D), (D,C) **の**2**点がひとつの再帰類を作り、しかも周期は**2**である**. $u(\vec{a},\vec{b}) = Ayy'+B(1-y)(1-y')$

(iii) r=r’=-1 の時, Markov**過程は再帰類が**(C,C),(D,D) **と**(C,D),(D,C)**の**2**つできて、いずれも周期は**2**である。このとき**1**周期辺りの期待利得は次の値に収束する。**

$$u(\vec{a},\vec{b}) = \frac{A+B}{2}\left(yy'+(1-y)(1-y')\right).$$

(iv) r=1, r=-1 の時, (C,C) **から出発した**Markov**過程は**(C,C) ⇒ (C,D) ⇒ (D,D) ⇒ (D,C) **と順に回っていき**, **周期は**4**である**. **このとき**1**周期辺りの期待利得は次の値に収束する**. $u(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{A+B}{4}.$

命題2 (i) $|rr'| < 1$ ($\Leftrightarrow$ $r,r' \in (-1,1)$) を満たすとき, このゲームの定常分布は $A, B < 0$ のときESSとなる。

(ii) $r=r'=1$ を満たすとき、このゲームの定常分布, 戦略の組 (C,C), (D,D) は $A > 0, B<0$ のとき (C,C) がESSとなり, $A<0, B>0$ のとき (D,D) がESSとなる、また $A, B > 0$ のとき (C,C), (D,D) それぞれESSとなる。ただしこの場合どちらの定常分布となるかは初期分布 y, y' による.

ノイズの導入：当初から取りうる戦略に制限を設ける。

$\varepsilon > 0$ **を固定して**, $\varepsilon \leqq p \leqq 1-\varepsilon$, $\varepsilon \leqq q \leqq 1-\varepsilon$,

命題3 $|rr'| < 1$ ($\Leftrightarrow$ $r,r' \in (-1,1)$) を満たすとき, このゲームにおいて, それぞれのゲームの型における定常分布はESSとなる。

3-2. Perfect Memory (Martingale)

非一様なMarkov連鎖

- **一様なMarkov連鎖**$(p^i_{j}=p)$ (Nowak(1990)**と同じ**)
- **非一様なMarkov連鎖**

を考える。
→過去の行動によって、戦略Cを採用する確率が異なる。
→完全記憶と解釈。

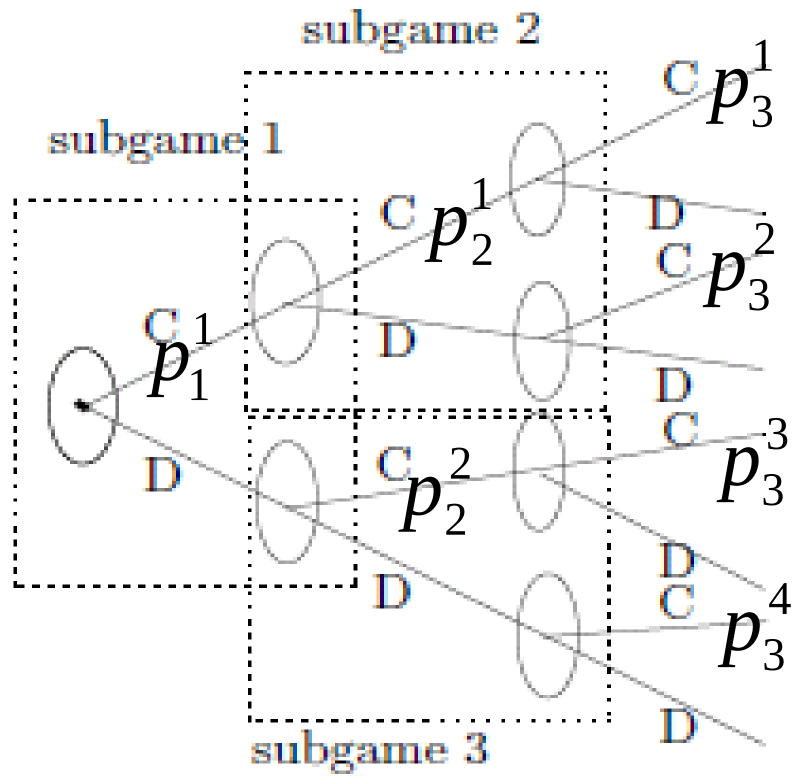


図 2. Markov 連鎖としてのゲーム

Model Setting

各主体の期待利得(von Neumann-Morgenstern's utility function)**を考える。**

- Expected Utility at *t* period :

戦略の数が2**つの場合**:

$$E[X_t]=p_t\times p_t\times A+p_t\times(1-p_t)\times B+(1-p_t)\times p_t\times C + (1-p_t)\times(1-p_t)\times D.$$

- **ここでのこれらの期待利得の列は** Martingale or NOT ?

Method

- Step1) This game is a **Martingale** or not.

→Yes

- Step 2) Apply **Optimal Stopping Theorem** (Stopping time is finite)
- Step 3) Derive **Wald 's equation**
- Step 4) Derive a **Nash Equilibrium**.

Main Theorem

定理 (**積に関する**Wald**の方程式**) X_n **は確率変数とする**. T **が** $E(T)<\infty$**を満たす停止時間**, μ**は**X_n**の平均であり**, **有限の値であるとき**,

$$E(X_1 \times \dots \times X_T) = \mu^{E(T)}$$

が成り立つ.

補題3 (**積のマルチンゲールに関する角谷の定理**) $X_1, X_2, \dots$ **を非負独立確率変数列で**, **各々の平均は**1**であるとする**. $M_0=1$**と定義し**, $n \in \mathbb{N}$**に対して** $M_n := X_1 X_2 \dots X_n$ **とする**. **このとき** M**は非負マルチンゲールであり**, $M_\infty := \lim M_n$ **が** a.s. **に存在する**. **そして以下の**(i)-(v) **は同値である**.

(i) $E(M_\infty) = 1$, (ii) L^1**の意味で** $M_n \to M_\infty$、

(iii) (M) **は一様可積分**(UI), (iv) $\prod a_n > 0$, **ただし** $0 < a_m := E(X^{(1/2)}_n) \leqq 1$, (v) $\Sigma(1-a_n) < \infty$

もし上の5**つのどれか**1**つ成り立たないときには**,

$$P(M_\infty = 0) = 1$$ **である**.

Outline of the Proof :

- $X_1, X_2, \ldots$ を独立な非負確率変数の列, $E(X_k) = \mu, \ \forall k$ とし, $M_0=\mu$, $F_0=\{\varphi, \Omega\}$ として, $M_n=X_1X_2\ldots X_n$, $\mathcal{F}_n=\sigma(X_1,X_2,\ldots, X_n)$, $Y_n = M_n - \mu^T$ と置く.

Step 1) Y_n はMaltingaleであるかどうか？

M_n : マルチンゲール $\rightarrow Y_n$: マルチンゲール.

- $n \geqq 1$ に対して、

$E(M_n \mid \mathcal{F}_{n-1})=E(M_{n-1}X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = M_{n-1} E(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1})=M_{n-1}E(X_n)$
$= \mu M_{n-1}$

をa.s. の意味で得る. よって$\mu=1$ のときマルチンゲールである。
上式の両辺を μ^n で割ると, $E(M_n/\mu^n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = M_{n-1}/\mu^{n-1}$
$\rightarrow M_n/\mu^n$ はマルチンゲールである.

Step 2) 積のマルチンゲールに関する角谷の定理から

$E(|Y_{n+1} - Y_n| \mid \mathcal{F}_n) = E(M_n(1-X_n)) < \infty$

Step 3)任意の停止定理の条件を満たすか？

$\rightarrow$Yes. $E(Y_T)=E(Y_0)=\mu, \ \forall T$ となる。これから

$E(Y_n) = E(M_n - \mu^T) = (X_1 - \mu) = 0.$ よって $E(M_n - \mu^T)=0$,
$E(X_1 \times \cdot \cdot \cdot \times X_n) = \mu^{E(T)}$. (証 終)

Method

- Step1) This game is a **Martingale** or not.

→Yes

- Step 2) Apply **Optimal Stopping Theorem** (Stopping time is finite)
- Step 3) Derive **Wald 's equation**
- Step 4) Derive a **Nash Equilibrium**.

命題5　停止時刻が有限であるとき，この完全記憶があるゲームにおける各主体の利得に関する期待値の列はマルチンゲールである。

- ノイズ

$$P(X_n = s_n + \varepsilon \mid X_0 = s_0, \ldots, X_{n-1} = s_{n-1})$$

命題6　平均が0であるような無相関のノイズがある完全記憶があるゲームにおける各主体の利得に関する期待値の列はマルチンゲールであり，平均が0でないような相関のあるノイズがある完全記憶があるゲームにおいてはマルチンゲールではない。

Method

- Step1) This game is a **Martingale** or not.

→Yes

- Step 2) Apply **Optimal Stopping Theorem** (Stopping time is finite)
- Step 3) Derive **Wald 's equation**
- Step 4) Derive a **Nash Equilibrium**.

Example

- **戦略の数(有限)が多いゲームにおいて、積に関するWaldの方程式を用いれば、戦略の数の少ないゲームに変換することができる。**

	戦略A	戦略B	戦略C	戦略D
戦略A				
戦略B				
戦略C				
戦略D				

	戦略C	戦略D
戦略C	R, R	S,T
戦略D	T,S	P,P

- **そのからNash均衡を導出することができる。**

4. Summary

1. Introduction (Motivation, Purpose)
2. Related Literatures and Review
3. Stochastic Evolutionary Game Theory
   3-1. Markov Chain
   3-2. Perfect Memory (Martingale)
4. Summary (Future works)

- 確率的進化ゲーム理論を確率論の枠組みで捉え、分析対象としているゲームがマルチンゲールであるならば、例にあるように分析が簡単になることがある。
- 具体的には展開形ゲーム理論はMarkov連鎖として捉えることができた。これを過去の全ての行動に依存するモデル(非一様なMarkov連鎖)に拡張し、このゲームにおける各主体の利得の期待値の列はマルチンゲールであった。
- また応用面では、このWaldの方程式を用いることによって、ゲームを簡単にすることができる。

- この手法は繰り返しゲーム理論(Repeated Game)にも適用することができる。

FUTURE WORKS

- **後半部分は、既存の確率的進化ゲーム理論** (Kandori, *et al.* (1993), Young (1993) **など**)**を拡張した研究との関連を調べる。**

- **記憶期間の問題**

 1**期前か、完全記憶かの**2**者択一だった。それを**N**期間の場合を考える** (Sabourian 1998)**。**

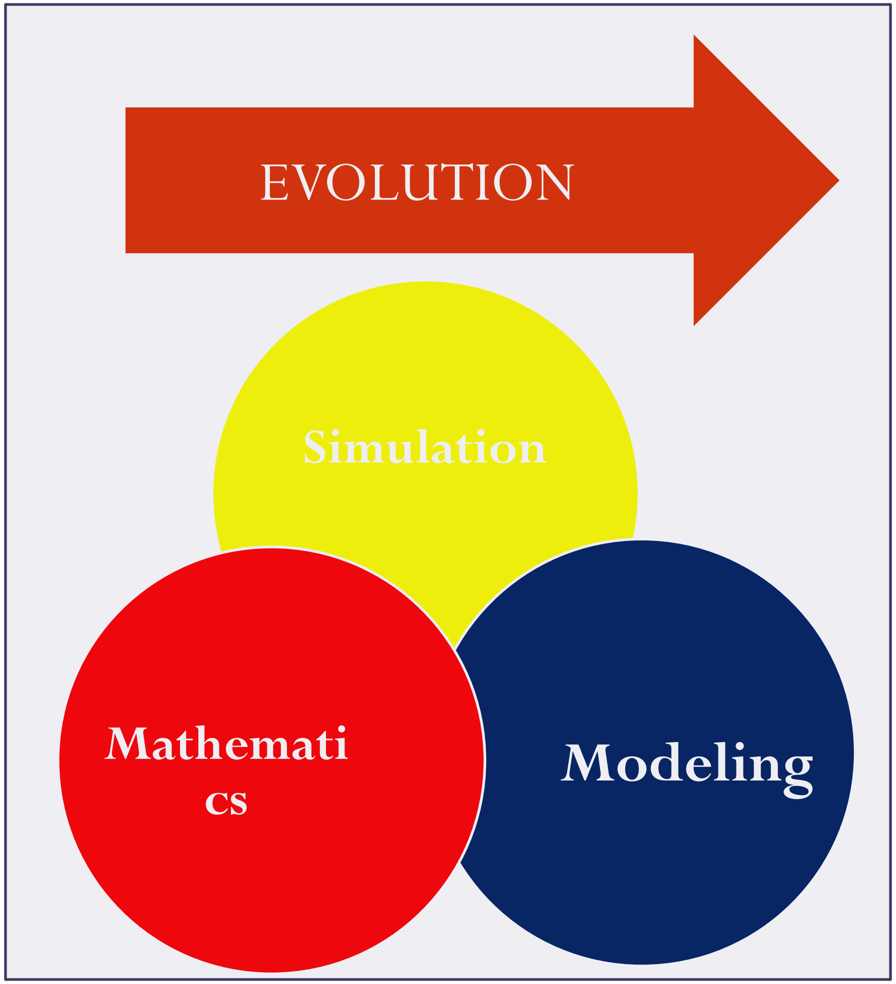
→**この問題は繰り返し囚人のジレンマゲームにおいて協調行動の発生がシミュレーションによる分析によって知られている。**

Thank you for your attention.

Mitsuru KIKKAWA (mitsurukikkawa@hotmail.co.jp)

This File is available at

http://kikkawa.cyber-ninja.jp/



PHENO
MENO
N

MITSURU KIKKAWA

http://kikkawa.cyber-ninja.jp/index.htm

明治大学
グローバルCOEプログラム
現象数理学の形成と発展

余談

The Application of the method to the Repeated Game

命題　このゲームは停止時刻が幾何分布に従い、有限の場合, 期待利得が0の場合マルチンゲールである。また無限の場合マルチンゲールである.

Outline of the Proof :

$$S_n = u_1 + \delta u_2 + \cdots + \delta^{n-1} u_n + \cdots$$

$$S'_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\delta^{i-1} u_i - \mu \right), \quad \mu = \delta^{n-1} E(u_n)$$

$$E(S'_n \mid F_{n-1}) = E(S'_{n-1} \mid F_{n-1}) + E(\delta^{n-1} u_n - \mu \mid F_{n-1}) = S'_{n-1}$$

→S'n **はマルチンゲールである。**

→Sn **がマルチンゲールであるための条件を導出。**

Wald の方程式の導出

任意抽出定理を用いると、

$$E(S'_N) = E(u_1 - \mu)$$

を得るが、これは0に等しい。ここで $S'n = Sn - n\mu$ に注意すると、次の関係式を得る.

$$E\left(\sum_{i=1}^{N} \delta^{i-1} u_i\right) = E(N)\mu.$$

この関係式から、有限の停止時刻までの利得和は平均の停止時刻と期待利得の平均との積で定まるので、各利得の大きさから Nash 均衡が定まる。

FAQ

PRELIMINARIES (EVOLUTIONARY GAME THEORY)

EVOLUTIONARY STABLE STRATEGY （ESS)

DEF.： Weibull(1995): $x \in \Delta$ is an ***evolutionary stable strategy (ESS)*** if for every strategy $y \neq x$ there exists some $\bar{\varepsilon}_y \in (0,1)$ such that the following inequality holds for all $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}_y)$.

$$u[x, \varepsilon y + (1-\varepsilon)x] > u[y, \varepsilon y + (1-\varepsilon)x].$$

INTERPRETATION： incumbent payoff (fitness) is higher than that of the post-entry strategy

（ESS : ①the solution of the Replicator equation + ② asymptotic stable.）

PROPOSITION

PRO.(Bishop and Cannings (1978)): $\chi \in \Delta$ is evolutionary stable strategy if and only if it meets these first-order and second-order best-reply :

$$(2.4) \quad u(y,x) \le u(x,x), \quad \forall y,$$

Nash Eq.

$$(2.5) \quad \begin{array}{l} u(y,x) = u(x,x) \\ \Rightarrow u(y,y) < u(x,y), \end{array} \quad \forall y \neq x,$$

Asymptotic Stable Conditon

REVIEW: Replicator Equation

REPLICATOR EQ. $\dot{x}_i = x_i\left((Ax)_i - x \cdot Ax\right), i = 1, \cdots, n.$

If the player's payoff from the outcome *i* is greater than the expected utility $x\,Ax$, the probability of the action *i* is higher than before. And this equation shows that the probability of the action *i* chosen by another players is also higher than before (**externality**). Furthermore, the equation is derived uniquely by the **monotonic** (that is if one type has increased its share in the population then all types with higher profit should also have increased their shares).

Two Strategies

$$\dot{x} = x(1-x)\{b-(a+b)x\} \quad \cdots (*)$$

Classification

(I) Non-dilemma: a > 0. b < 0, ESS : one

(II) Prisoner's dilemma : a < 0. b > 0, ESS :one

(III) Coordination : a>0,b>0, ESS two

(IV) Hawk-Dove : a<0,b < 0, ESS one (mixed strategy)

2

1	S 1	S 2
S 1	a,a	0,0
S 2	0,0	b,b

Payoff Matrix

GAME WITH PERFECT RECALL

定義18 展開形ゲームΓが**完全記憶ゲーム**であるとは, すべてのプレイヤー i ($i=1,\ldots,n$) のすべての情報集合 $u, v \in U_i$ に対して, もしvのある手番 y が u から枝 c によって到達可能ならば, v のすべての手番が同じ枝 c によって u から到達可能であることである.

- 完全記憶ゲームではすべてのプレイヤーは各手番において,

(1) 過去の自分の手番でのすべての選択, および

(2) 過去の自分の手番で利用可能であったすべての情報

を記憶している. 完全情報ゲームは, 完全記憶ゲームの特別な場合である.

REFERENCES

- Aumann, R. J. and Sorin, S. (1989): GEB, **1**, 5.[HP]
- Aumann, R. J. and Maschler, M. B. with the collaboration of R. B. Stearns (1995): *Repeated Games with Incomplete Information*, MIT Press. [AMAZON]
- Cole, H.L. and Kocherlakota, N. R. (2005): GEB, **53**, 59.[HP]
- Doob, J.L. (1953): *Stochastic Processes*, John Wiley & Sons, Inc.[AMAZON]
- Ellison, G. (1993):Econometrica, **61**, 1047.[HP]
- Friedman, J. W. (1985): JET, **35**, 390.[HP]
- Fudenberg, D. and Levine, D. K. (1992): RES, **59**, 561.[HP]

- Harsanyi, J. and Selten, R. (1988): *A General Theory of Equilibrium Selection in Games*, MIT Press.[AMAZON]
- Hofbauer, J.and Sigmund, K. (1998): *Evolutionary Game and Population Dynamics*, Cambridge U P.[AMAZON]
- **今井晴雄**, **岡田章** (2002): **「ゲーム理論の新展開」勁草書房**.[AMAZON]
- Jensen, M., Sloth, B., and Whitta-J, Hans J. (2005): Economic Theory, **25**, 171.[HP]
- Kakutani, S.(1948): The Annals of Mathematics, 2nd Ser., **49**, 214.[HP]
- Kandori, M., Mailath, G. J. and Rob, R. (1993):Econometrica, **61**, 29.[HP]
- **吉川満** (2008): **『北海道大学数学講究録』,126,** 173.[HP]
- **河野敬雄** (2003): 『Rokko Lectures in Mathematics』 **13**.[PDF]

- Kuhn, H.W. (1953): in H.Kuhn and A.Tucker (eds.), *Contributions to the Theory of Games*, Vol.II, Princetion UP, 193.[AMAZON]
- Lehrer, Ehud (1988): JET, **46,** 130.[HP]
- Mailath, G. J. and Samuelson, L.(2006): *Repeated Games and Reputations - Long-Run Relationships*, Oxford U P. [AMAZON]
- Matsui, A. and Matsuyama, K. (1995): JET **65**,415.[HP]
- Nowak, M. A. (1990): TPB, **38**, 93.[PDF]
- **岡田章** (1996): **「ゲーム理論」有斐閣**, 1996 **年**.[AMAZON]
- Rapoport, A. and Chammah, A. M. , *Prisoner's dilemma: A Study in Conflict and Cooperation*, The University of Michigan Press, 1965.[AMAZON]
- Sabourian, H.(1998): JME, **30**, 1.[HP]

- Selten, R. (1975): IJGT,**4**, 25.[HP]
- Sorin, S. (2002): *A First Course on Zero-Sum Repeated Games*, Springer-Verlag. [AMAZON]
- Di Tillio, A. 2004): Mimeo.
- Williams, David (1991): *Probability with Martingales*, Cambridge U P.[AMAZON]
- Young, H.P.(1993): Econometrica, **61**, 57.[HP]

Acknowledgements

- この報告内容は「2008年度 夏季研究会(関西学院大学大学院経済学研究科研究会)』」，「第14回 DC コンファレンス(近畿大学経済学部)」，「第18回日本数理生物学会大会(同志社大学)」にて報告したものを、加筆・訂正したものである。

- 筆者はこれらの研究会で報告することによって，さらには討論者の七條達弘(大阪府立大学)先生や研究会の参加者からの多くのコメントを受けたことに感謝いたします。ただし本報告の内容についての責任はすべて筆者に帰する。

2009年6月　　吉川　満。