統計力学を用いた進化ゲーム理論

吉川　満*

平成 19 年 8 月 25 日

概 要

進化ゲーム理論を統計力学を用いて定式化を行った．具体的には最近接の人とのみ, ランダムにマッチングする状況を統計力学で最も単純な Ising モデル、SK モデルを参考に定式化を行った．その結果伝統的な進化ゲーム理論と一致する場合としない場合があることが分かった．また無限人経済では戦略の一致は起こらないと分かった．

JEL: C73

キーワード: 統計力学，Ising モデル，SK モデル, TAP 方程式，Random 行列，進化ゲーム理論

Key words: Statistical Mechanics, Ising Model, SK Model, TAP Equation, Random Matrix, Evolutionary Game

1　はじめに

考察する対象において, 各個人がどのような人とどのような戦略を使って, Game を行い, いくら効用を得ているのかという, Micro な関係ことが分からないが, Macro 全体として考えるとある程度分かる．そのような対象において, 1 つずつの Game を見れば, ちゃんと Game 理論の枠組みで議論できるが, これが何千, 何万との数ともなると記述することは到底できない．例えば数学としてこのような高次元系のモデルでは, 均衡の局所安定性は Routh-Hurwitz の定理[1]から分かる．しかし途方もなく条件が複雑になり, 実質解析的には分析できなくなってしまう．そこでこの解析の困難を分布関数を導入することによって, 高次元系を分析する．この方法は一般的に統計力学 (statistical mechanics) と言われている．この統計力学を端的に説明すると, 一様に分布している Micro(局所) の情報から, Macro(大域) の情報を得る方法である．

昔から経済学では少数関係をもとに, 全体の様子を調べるという, 方法を用いてきている．例えば Micro 経済学では, 一般均衡の Core 極限定理を示した Debreu and Scarf [3] の基礎となっている経済は Replica 経済と呼ばれるもので, 1 対 1 の Edgeworth の交渉を 1 つの経済として, それを無限人経済に拡大すると, Core が縮小していき, Walras 均衡に収束するというものであった．また Macro 経済学における Micro 的基礎付けの問題がある．これは代表的個人 (representative agent) の最大化問題を入れ, その結果家計はこのような

*mitsurukikkawa@hotmail.co.jp

[1]付録参照

行動を行うという前提の下で, Macro 全体に起こる現象を考えていることに対応しているであろう. しかし主体の行動を最適化問題として扱い, 主体の行動を一意に定めており, この一意性を外した場合をも考慮に入れるのが本稿の特徴である. よって n 個の経済, 経済主体がいたとしても, ただ単純に n 倍すればよい, というものではない. 分布によって様々な状況が想定される.

もちろん様々な主体がいるということに着目した研究も存在する例えば Grandmont [5] は測度論的一般均衡のアイデアを借り, 条件付確率を用いて, 様々主体のいる市場モデルを構築した. そこでは [0,1] 連続体 (continuum) を考え, その中でいろいろな人間がいると仮定し, 測度を条件付確率とした. この測度に主体の需要量をかけ, 積分することによって, 需要関数を定義した. これと初期保有から超過需要関数を定義し, それと価格ベクトル p をかけたものが 0 となるのか, つまり均衡が存在, 安定性を研究している. Grandmont も論文の最後に統計力学という言葉を使用し, これからこの統計力学の重要性を説いている.

またこの統計力学を経済学に導入したものとして, 久保 [9] がある. 久保 [9] では統計力学の 1 つのたとえ話として, 各個人の所有する通貨の量の分布というものを確率的に考え, あるお金を N 人で分配する. ただしここでの分配方法は考えず, ありとあらゆる方法を考え, その中で各個人が得られる期待値を考える. そのとき人数が多くなるにつれて, 公平な分配となるということを示している. ここで分配メカニズムは一般によく使われている平等分配や貢献度によって分けるなど, よく用いられている分配法とそうではない不公平である分配方法が同じ確率で実現するという, 等重率の仮定を設けているので, 経済学としてこの研究を捉えると不十分と感じるが, 統計力学の大御所が統計力学の例として分配の問題を考え, 興味深い結論が得られている.

特に本研究では進化ゲーム理論に統計力学を導入する. 進化ゲーム理論は現在主に戦略の頻度の動学を表す, Replicator 方程式を使うものとそれを用いず, 遷移確率の動学を考えた確率進化ゲーム (Stochastic Evolutionary Game) の 2 つがある. この 2 つの理論はともに戦略の数が増えると, 考察する方程式の数が増加し, 解析的には分析できなくなる. そこで本研究では統計力学を用いて, 新たな高次元系を分析できる進化ゲーム理論を提案する.

このように統計力学を用いて, 進化ゲーム理論を分析した先行研究は, Diederich and Opper[4], Tokita and Yasutomi[14] などがある. また吉田 [18] では, 先駆的に Ising モデルを経済学における協同現象と Incentive の問題のモデルとして議論している. ただし Ising モデルそのままをこのモデルとして解釈しているため, 協同した方よい, という仮定の元で議論しており, より一般的な経済学のモデルとして取扱う場合は不便である. さらに Bouchard and Brezin[1] では, Finance 理論に Random 行列を導入したモデルを紹介している. Random 行列に $H_{ij} = H_{ji}$ という対称性を考え, Gauss 直交アンサンブルとして考えており, かなりの厳しい制約を課しているので, 果たしてこのモデルを Finance のモデルとして扱ってよいのか疑問が残る. このようにこれらの研究は物理学の仮定の下, 統計力学を導入しているので, 経済社会を分析する際には現実離れした仮定が数多く存在する. よって本稿では進化ゲーム理論の背景に合う仮定の下で議論する.

より具体的には統計力学で最も単純な Ising モデル, それを拡張した SK(Sherrington-Kirkpatrick) モデル, さらには TAP(Thouless-Anderson-Palmer) 方程式の方法における Random 行列[2]の固有値の特性を用いて, 高次元の進化ゲーム理論の構築を行った.

[2]行列の要素がある分布によって変化する行列のことである. 今まで Random 行列の概念は 1920 年代に数

本稿は次のように構成されている．第 2 節で, 最近接格子とゲームを行うモデルを定式化する．第 3 節で, ランダムにマッチングし, ゲームを行うモデルを定式化する．第 4 節で, TAP 方程式を用いて, 秩序変数をより詳しく分析する．第 5 節で, 結論と今後の課題を述べる．

2 格子モデル

2.1 2×2 対称 2 人ゲーム

本節では統計力学で最も単純なモデルである, 格子モデルを進化ゲーム理論に導入する．よってここでは有限であるが, かなり多数の人がいて[3], 2 タイプの主体が 1 対 1 で出会い, 戦略を 2 つを持ち, ゲームを行うとする．

そこで本研究ではこの格子上の各要素を主体と見て, その主体が戦略を 2 つ持って, 1 つ制御変数を入れ, どのようなときに戦略があるところに揃ったり, またはランダムに分布するのかということを考える．

具体的には 1 から N までの整数の集合 $V = \{1, 2, \cdots, N\} \equiv \{i\}_{i,\cdots,N}$ を格子, その要素 i をサイト (site) あるいは格子点と呼ぶことにする．サイト 2 個の組を適当に集めた集合 $B = \{(ij)\}$ を作り, その各要素 (ij)(ボンドあるいは結合) は隣同士の組 (最近接格子点 (nearest neighbour) 対) でゲームを行う．そこでの結果利得・適応度 (fitness) が対応していく．元来進化ゲーム理論では一列に並んで以前の行っているゲームを見ることができるがこのモデルでは同時にゲームを行う．よって動学理論ではなく, 静学理論である．もちろん動学理論への拡張も可能である．

EXAMPLE 2.1 主体が 1, 2 がある戦略的な相互作用がある状況にあるとする．特に戦略が 2 つ場合の対称 2 人ゲームを考える．このときの各主体の戦略は $S_i = \{1, 2\}$,$S_j = \{1, 2\}$ である．また主体 1 の利得は $f_{11} = a$, $f_{22} = b$, $f_{ij}(i \neq j) = 0$ とする．この状況をまとめると次のような利得表となる．

1＼2	戦略 1	戦略 2
戦略 1	a,a	0,0
戦略 2	0,0	b,b

理統計学の分野において導入された．1950 年代になって, E.P.Wigner はこの概念に着目し, 原子核物理学への転用を行った．すなわち乱数を要素にもち基本的な対称性を満足する行列を考え, これが複雑な原子核のエネルギー準位の統計的な性質 (準位統計) をよく再現するだろうという仮説を立てたのである．この Random 行列を和書で解説した唯一の本として永井 nagao2005 がある．詳しくは参照のこと．

[3] この分野の人口については有限, 無限, あるいは有限だけれどもかなり大きい数など様々ことが言われている．この問題を研究している論文もある．例えば Judd [7], Boylan [2] など存在する．無限であると数学的に高度となり, 既存の多くは研究はすべて数学的には不正確となっていまう．しかし有限であると, 大数の法則が成り立たず, Random Matching とはならず, これもモデリングする際困難が生じる．結果に重大な影響がないので, 折衷案として有限だけれどもかなり大きい数というのがこの分野での暗黙のルールとなっている．統計力学の要素の数は有限だけれどもかなり大きい数から無限までの数であるの範囲内である．

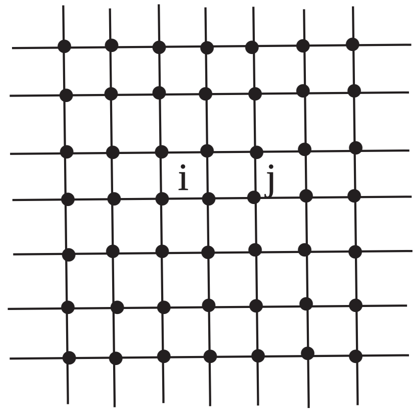

図 1: 2 次元正方格子と最近接格子点の例. 要素 (i, j) は経済主体を表している.

Payoff Matrix 1.

EXAMPLE 2.2 統計力学で最も単純なモデルである, Ising モデル EXAMPLE 2.2 と同様に記すと, その各要素が $+1, -1$ を持っている. ただしこのときのハミルトニアン (エネルギー, 利得) は, $a, b > 0$ である.

1 ＼ 2	戦略 1(−1)	戦略 2(+1)
戦略 1(−1)	a,a	0,0
戦略 2(+1)	0,0	b,b

Payoff Matrix 2.

ASSUMPTION 2.3 各主体は高い利得・適応度を得ることを望んでいる.

PROPOSITION 2.4 ASSUMPTION 2.3 のもとでの主体 x のある戦略 $\{S_i\}, i = 1, \cdots, N$ を取り, ある利得 f を得るというゲームの状況下に戦略 $\{S_i\}$ の確率分布は

$$P(\{S_i\}) = Z^{-1} \exp(\gamma f) \tag{2.1}$$

となる. ただし $\{S_i\}$ は主体 i の戦略, γ は制御変数[4], f はある戦略 $\{S_i\}$ を取ったときの利得・適用度, Z は規格化定数を表している. よって $\sum_{i=1}^{N} P(\{S_i\}) = 1$ となる. また $Z =$ Tr $\exp(\gamma f)$, (Tr をすべての要素配列についての和) と書くことも多い.

[4] γ は制御変数であるが, このモデルではゲームを一斉に行い, 他者がどのような戦略を用いているのか分からない. そこでこの制御変数 γ が他者の行動を知らせる, 例えば正の情報量などを表している. そのため制御変数 γ が最大のとき, 既存の進化ゲーム理論と同様になる.

証明: 略[5].

よってこの PROPOSITION 2.4 から, 利得 f が大きければ, その戦略をとる確率が高くなることを表している[6]. またこの (2.1) 式を, **Gibbs-Boltzmann** 分布 (Gibbs-Boltzmann distribution), $\exp(\gamma f)$ を**Boltzmann 因子**(Boltzmann factor) という.

DEFINITION 2.5 戦略が一定の秩序を持っているかどうかを判断する量を**秩序パラメータ**(order parameter) という概念を次のように導入する.

$$m = \frac{1}{N}\Big\langle \sum_{i=1}^{N} S_i \Big\rangle \equiv \frac{1}{N}\Big(\sum_i S_i P(\{S_i\}) \Big). \tag{2.2}$$

ただし $\langle\ \rangle$ は平均を表している.

EXAMPLE 2.6 EXAMPLE 2.1 を例に取る. このとき $\{S_i\} = 1, 2, N = 2$ であるので, 各戦略を取ったときの秩序パラメータは,

戦略 1 を確率 1 でとる場合, $m = \frac{1}{2}$,
戦略 2 を確率 1 でとる場合, $m = 1$,
戦略 1 と戦略 2 をランダムにとる場合, $m = \frac{3}{4}$.

と計算できる. これから m の値は $\frac{1}{2} \leq m \leq 1$ の間で, $m = \frac{1}{2}$ に近ければ, 戦略 1 を取る人が多いと分かる. $m = 1$ に近ければ, 戦略 2 を取る人が多い. ランダムで戦略を取る場合は, $\frac{3}{4}$ であると分かる.

また EXAMPLE 2.2 の Ising モデルでは, $S_i = \{-1, 1\}$ としているので, $m = 1, 0$(ランダム), -1 となる.

γ が大きければ, 利得の大小関わらず $S_i = \{-1, 1\}$ のどちらか均衡へ収束する. γ が小さければ, 均衡へ収束せず, ランダムとなる. これをまとめると次のような図となる. 利得によっては収束するが, そうではない場合, 収束しない場合もある.

よって EXAMPLE 2.6 より, 秩序パラメータ m の値自身は関係なく, m の値からどちらの戦略の方が多く採用している, ランダムに取っているなど戦略の分布を示していることが分かる.

DIFINITION 2.7 (Weibull [15]) $x \in \Delta$ が進化的に安定な戦略 (Evolutionary Stable Strategy: ESS) であるとは, どのような戦略 $y \neq x$ に対しても, ある $\bar{\epsilon}_y \in (0, 1)$ が存在し, すべての $\varepsilon \in (0, \bar{\epsilon}_y)$ について次の不等式が成り立つことをいう.

$$u\big[x, \varepsilon y + (1-\varepsilon)x\big] > u\big[y, \varepsilon y + (1-\varepsilon)x\big]. \tag{2.3}$$

[5]導出の仕方は様々あるが, 等重率を仮定するとこの形となる. 詳細は統計力学の教科書を参照のこと.

[6]進化ゲーム理論一般に使われている Replicator 系では, ある戦略 i が平均値よりも大きければ, その戦略を選ぶ頻度・確率が高くなるということに対応している.

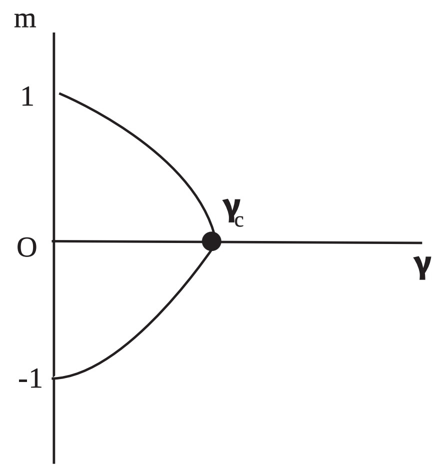

図 2: 例: Ising モデルにおける制御変数 γ と秩序変数 m との関係.

PROPOSITION 2.8 DIFINITION 2.7 で定義した進化的安定な戦略は以下の条件と同値である.

(2.4) $u(y,x) \leq u(x,x), \qquad \forall y,$

(2.5) $u(y,x) = u(x,x) \Rightarrow u(y,y) < u(x,y) \qquad \forall y \neq x,$

証明: 略. Weibull [15] などに記されている.

次に秩序パラメータ m を用いて, 進化的に安定な戦略の特徴づけを行う.

PROPOSITION 2.9 統計力学を用いた進化ゲーム理論における進化的に安定な戦略とは次の条件を満たす.

(2.4) $u(y,x) \leq u(x,x), \qquad \forall y, \qquad (Equilibrium\ Condition)$

(2.6) $|m - m^*| < \varepsilon. \qquad (Stability\ Condition)$

ただし m^* は制御変数 γ が最大時の m の値を示している.

証明: 略.

PROPOSITION 2.8 では, Nash 均衡の条件に, 安定性の条件 (漸近安定) を付け加えることによって, 進化的に安定な戦略と同値であることを言っているが, PROPOSITION 2.9 のように秩序パラメータを使い, それを Lyapunov 安定性の条件に代えることができるということを言っている. PROPOSITION 2.8 では静学はもとより, 動学の場合をも含んでいる. しかし PROPOSITION 2.9 は静学の場合のみを考えているので, Lyapunov 安定性の条件に代えることができる.

2.2 2×2 非対称 2 人ゲーム

今まではゲームを行う相手は利得構造が等しかったが, ここではゲームを行う相手の利得構造が等しくない場合を考える. よって格子の要素の隣り合う相手は異なった種類のものがあると考える. そのため対称 2 人ゲームでは 1 つの秩序パラメータだけを考えればよかったが, この非対称 2 人ゲームでは分布が 2 つあるので, 秩序パラメータを 2 つ考える必要がある. そこで例えば秩序パラメーターを

$$m_1' = \frac{1}{N}\Big\langle \sum_{i=1}^{N} S_i \Big\rangle \equiv \frac{1}{N}\Big(\sum_i S_i P(\{S_i\}) \Big). \tag{2.7}$$

$$m_2' = \frac{1}{N}\Big\langle \sum_{j=1}^{N} S_j \Big\rangle \equiv \frac{1}{N}\Big(\sum_j S_j P(\{S_j\}) \Big). \tag{2.8}$$

とする. その結果進化的に安定な戦略は PROPOSITION 2.8 の (2.5) の条件を以下のようにすれば修正すれば足りる.

$$|m_1' - m_1^*| < \varepsilon_1,\ |m_2' - m_2^*| < \varepsilon_2 \tag{2.9}$$

ただし m_1^*, m_2^* は制御変数 γ が最大時の m の値を示し, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$ で小さい数とする.

以上により統計力学を用いて, 進化ゲーム理論を定式化した.

REMARK 2.10 例えばこの一般的な非対称 2 人ゲームは, 売り手と買い手が様々な戦略を持って, ランダムにマッチし, Game を行うという, Walras のせり人不在の経済に対応している.

3 2×2 のランダムな相互作用

3.1 Sherrington-Kirkpatrick Model

前節の Ising モデルを基礎としたものでは, 戦略の数が 2 つであり, 最近接な相互作用がある場合を考えてきたが, 本節では戦略の数が 2 個あり, ランダムな相互作用をしている. つまり様々な人間がおり, 戦略を 2 つ持ち, 1 対 1 でゲームをする場合を考える. このゲームは非対称 2 人ゲームに対応している. またこのような不均一な系はスピングラスの理論 (spin glass) と呼ばれている. 特にここで取り上げるモデルは Sherrington-Kirkpatrick(SK) Model を取り上げる.

ここで利得・適応度は,

$$H(\{J_{ij}\}) = \sum_{i \neq j} J_{ij} S_i S_j \tag{3.1}$$

$$\text{where} \qquad P(J_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi J^2}} \exp\Big\{ -\frac{(J_{ij} - J_0)^2}{2J^2} \Big\} \tag{3.2}$$

各主体は $i, j \in B$ であり, J_{ij} は確率分布 $P(J_{ij})$ に従ってランダムに分布しており, 平均が

J_0 で, 分散が J^2 の Gauss 分布を表している.

この節でも ASSUMPTION 2.3 を満たしていると仮定する. 各主体間の相互作用の分布が主体の行動パターンと絡んでおり, 利得の高い方に変化する (PROPOSITION 2.4). これを一般にアンニールした (annealed) 系と呼ばれている[7]. 自由エネルギーの配位平均を求めるために, 自由エネルギー, 分布関数の配位平均は次のようになる.

$$F = \gamma \log \langle Z \rangle, \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}\langle Z \rangle &= \sum_{\{S_i\}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{(ij)} dJ_{ij} P\{J_{ij}\} \exp(\gamma H\{J_{ij}\}), \\ &= \sum_{\{S_i\}} \exp\Big[\sum_{(ij)} \Big\{ \gamma J_0 S_i S_j + \frac{(\gamma J)^2}{2} (S_i S_j)^2 \Big\} \Big]\end{aligned} \tag{3.4}$$

となる. この式から分かるように, 相互作用の強さは格子点 i, j によらない. したがってこの系は長距離相互作用をもつ系である. そこで指数の肩を A_N とおくと

$$\begin{aligned} &A_N \equiv \sum_{i \neq j} \Big\{ \gamma J_0 S_i S_j + \frac{1}{2} (\gamma J)^2 (S_i S_j)^2 \Big\} \\ &\sum_{i \neq j} S_i S_j = \Big(\sum_i S_i \Big)^2 - N \sum_i S_i^2, \ \sum_{i \neq j} \Big(S_i S_j \Big)^2 = \Big(\sum_i S_i^2 \Big)^2 - N \sum_i S_i^4. \end{aligned} \tag{3.5}$$

(3.5) を用いると, A_N は次のようになる.

$$A_N = \gamma J_0 \Big(\sum_i S_i \Big)^2 - \gamma J_0 N \sum_i S_i^2 + \frac{1}{2} (\gamma J)^2 \Big(\sum_i S_i \Big)^4 - \frac{1}{2} (\gamma J)^2 N \sum_i S_i^4 \tag{3.6}$$

となる. したがって式 (3.3) より

$$\begin{aligned} F &= \gamma \log \Big[\sum_{\{S_i\}} \exp \Big\{ \gamma J_0 \Big(\sum_i S_i \Big)^2 - \gamma J_0 N \sum_i S_i^2 + \frac{1}{2} (\gamma J)^2 \Big(\sum_i S_i \Big)^4 - \frac{1}{2} (\gamma J)^2 N \sum_i S_i^4 \Big] \\ &= \gamma \Big[\sum_{\{S_i\}} \Big\{ \gamma J_0 \Big(\sum_i S_i \Big)^2 + \frac{1}{2} (\gamma J)^2 \Big(\sum_i S_i \Big)^4 - \gamma J_0 N \sum_i S_i^2 - \frac{1}{2} (\gamma J)^2 N \sum_i S_i^4 \Big\} \Big] \end{aligned} \tag{3.7}$$

を得る. そこで秩序パラメータ $m = \langle S_i \rangle$ と置くと, $\sum_i^N S_i = mN$ となる. すると,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial m} = 2\gamma^2 J_0 N^2 m + 2\gamma^3 J^2 N^4 m^3 = 0 \\ &m = 0 \text{ or } \pm \sqrt{\frac{-J_0}{\gamma J^2 N^2}} \end{aligned} \tag{3.8}$$

特に $N \to \infty$ とすると, $m = 0$ となる.

よって $m \neq 0$ となる m^* があることから, 高次元系でも戦略に何らかの秩序が存在することが分かった. つまり均衡の存在を明示しており, 後の議論は 2 節と同様の結論が得ら

[7]これに対して当初から主体間の相互作用の強さか決まっている系をクエンチした (quenched) 系という. 特に先行研究ではこのクエンチした系を分析している. そこで Replica の方法を用いて, クエンチした系からアンニールした系に変換している. 本稿では Replica の方法を用いないので, より容易に導出できる.

れる．また同様に非対称 2 人ゲームに拡張する場合も同様である．ただし無限人経済では均衡はしないということが分かった.

4 Thouless-Anderson-Palmer 方程式

以上までが SK モデルを変形させ, 進化ゲーム理論に適応させたものであった．ここで Thouless-Anderson-Palmer 方程式, 秩序変数自体の方程式に行列の固有値の特性を用いることによって相転移となる値を導出する．具体的には最大固有値 (Frobenius 根) を求め, そこから Perron-Frobenius の定理[8]により安定, 不安定の境界を求める.

4.1 Hermite Matrix

各主体がランダムにマッチする場合を考える．そのとき各主体が得ることができる利得はランダムに変化する．このことを表すことができるのが, Random 行列である．要素がランダムに変化することからある一定の法則があることが知られている．$J_{ij} = J_{ji}$ という仮定を設けても利得における Affine 変換可能であることから, この Random 行列理論は Hermite 行列と変形できる．その結果 Wigner の半円則より最大固有値が求まる. Perron-Frobenius の定理を適用すればよい．特に Random 行列が Hermite 行列である場合固有値が実数のみとなる[9].

まず (3.8) から m の値が不連続となる値は存在しない．よって相転移は起こらない.

次にもう一つ変数 h_i を導入する．その結果各主体は周りを見ることができ, 周りの影響によっても利得が変化する場合を考える．その結果利得・適応度は (3.1) と比べ, 次のように変形する.

$$H(\{J_{ij}\}) = \sum_{j \neq j} J_{ij} S_i S_j + \sum_j h_j S_j \tag{4.1}$$

第 3 節と同様に計算すると,

$$F = \gamma \Big[\sum_{\{S_i\}} \Big\{ \gamma J_0 \Big(\sum_i S_i \Big)^2 + \frac{1}{2} (\gamma J)^2 \Big(\sum_i S_i \Big)^4 - \gamma J_0 N \sum_i S_i^2 - \frac{1}{2} (\gamma J)^2 N \sum_i S_i^4 - m h_j \Big\} \Big] \tag{4.2}$$

$$h_j = 2\gamma m (1 - N)(J_0 + J^2 m^2) \tag{4.3}$$

この場合も秩序変数 m が不連続となる点がない．これはアンニール系を仮定しているため, 経済主体が自ら行動しているから不連続となる点が存在しないと考えることができる.

それでは秩序変数が不連続となる次の例を取り上げる.

EXAMPLE 4.1 Ising スピングラス ハミルトニアンは,

[8]付録参照

[9]証明は省略する．線型代数の教科書を参照されたい.

$$H = -\sum_j J_{ij}\sigma_i\sigma_j - \sum_j h_j\sigma_j$$

と書ける．$\{J_{ij}\}$ を 1 つ固定したサンプルについてスピン熱平均をとると, 相関等式

$$\langle\sigma\rangle = \Big\langle \tanh\Big\{\beta\Big(h_i + \sum_j J_{ij}\sigma_j\Big)\Big\}\Big\rangle$$

が厳密に成立する．ここで熱平均 $\langle\rangle$ を tanh の中に移す近似を行うと Weiss 近似の表式

$$m_i = \tanh\Big\{\beta\Big(h_i + \sum_j J_{ij}m_j\Big)\Big\}$$

が得られる．$J_0 = 0$ の周辺で展開すると,

$$m_i = \beta\sum_j J_{ij}m_i - \beta\sum_j J_{ij}^2 m_i + \beta h_i + \cdots$$

$N \times N$ の J_{ij} 行列の固有ベクトルによる展開を行う．固有ベクトル $\{\langle i|\lambda\rangle\}$ は完全規格直交系とし, 固有値を J_λ とする ($\sum_j J_{ij}\langle i|\lambda\rangle = J_\lambda\langle i|\lambda\rangle$)．また, $m_\lambda = \sum_i m_i\langle i|\lambda\rangle, h_\lambda = \sum_i h_i\langle i|\lambda\rangle$ で, それぞれ λ モード磁化, λ モード磁化を導入する．

$$m_\lambda = \frac{1}{T - J_\lambda}h_\lambda$$

最大固有値が J_Λ が $2J$, 最小固有値が $-2J$ その他の固有値はその間に半円則

$$\rho(J_\lambda) = \frac{2}{\pi J_\Lambda^2}\Big(J_\Lambda - J_\lambda^2\Big)^{1/2}$$

となるので, $T_C = 2J_\lambda$ である．つまり相転移の温度は $2J_\lambda$ である．

5 Concluding Remarks

以上のように統計力学を用いて進化ゲーム理論を定式化を行った．その結果 Replicator 方程式を使うものや確率進化ゲームとは異なる新しいものとなった．そこでは空間に分布している経済主体が一斉にゲームを行い, どの程度戦略が一致しているのか, 秩序変数を用いて分かり, 制御変数によっては通常の進化ゲーム理論と一致し, 制御変数によっては戦略の分布が全くランダムとなることが分かった．

次に今後は Master 方程式を動学にする． 例えば本稿を動学にすると, Decentralized Market としての市場のモデルと考えることが可能である．Rubinstein and Wolinsky [12], Osborne and Rubinstein [13] では, 売り手と買い手がランダムにマッチし, 提案応答 (alternating offer) ゲームを行うゲームを考え, 一般的な一般均衡理論と見比べ, 人数が無限であると, Nash 均衡と Walras 均衡は一致するという結論を得ている．

本稿ではマッチしたあと, 交渉を行わないが, 交渉を行うことを考える．例えば提案応答

ゲームを行う. よって当初の利得が変化していく場合を考えると上述の研究と比較対照できるモデルである, Decentralized Market としての市場のモデルと見ることも可能である.

Appendix

Routh-Hurwitz の定理: 一般に, 次の特性方程式

$$\Lambda^s + a_1\Lambda^{s-1} + a_2\Lambda^{s-2} + \cdots + a_s = 0$$

によって決まるすべての固有値の実数部が負であるための必要十分条件は,

$$a_1 > 0, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0,$$

$$\ldots \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_s \end{vmatrix} > 0$$

Perron-Frobenius の定理:
$A \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ を既約な非負行列とするとき, このとき, A は次の性質をもつ実固有値 $\lambda(A)$ をもつ.
(i) $\lambda(A)$ は正で, これに対応する非負の固有ベクトル $x \geq 0$ が存在する.
(ii) ある $x \geq 0$ に対して, $Ax \geq \mu x$ が成り立つような実数 μ は, 不等式 $\mu \leq \lambda(A)$ を満たす.
特に, A の任意の固有値 (一般に複素数) を ω とすれば, $|\omega| \leq \lambda(A)$. ただし, $|\omega|$ は複素数 ω の絶対値である.
(iii) $\lambda(A)$ は A の単調増加関数である. すなわち, $A_1 \geq A_2 \geq 0$ ならば, $\lambda(A_1) \geq \lambda(A_2)$.
(iv) ρ を実数, I を n 次単位行列とするとき, $\rho I - A$ が非負の逆行列 $(\rho I - A)^{-1}$ を持つための必要十分条件は, $\rho > \lambda(A)$.
(v) $\lambda(A)$ は特性方程式 $\det(\lambda I_n - A) = 0$ の単根である.

Remark A.1
$A \in \boldsymbol{R}^{n\times n} \geq 0$ を既約とすると, $\lambda(A) = \lambda(A^T)$ が成り立つ.

参考文献

[1] Bouchaud, Jean-Philippe and Potters, Marc.: *Theory of Financial Risk - From Statistical Physics to Risk Management*, Cambridge University Press, 2000. 邦訳: 森平爽一郎 (監修), 森谷博之, 熊谷善彰 (訳)『金融リスクの理論』朝倉書店, 2003 年.

[2] Boylan, Richard T.: "Laws of Large Numbers for Dynamics Systems with Randomly Mathced Individuals," *Journal of Economic Theory*, Vol.**57**, Issue 2 (Aug., 1992), pp. 473-504.

[3] Debreu, Gerard and Scarf, Herbert: "A Limit Theorem on the Core of an Economy," *International Economic Review*, Vol.**4**, No.3 (Sep., 1963), pp. 235-246.

[4] Diederich, S. and Opper, M.: "Replicators with random interactions: A solvable model," *Physical Review A*, Vol.**39**, Number 8 (1989) pp.4333-4336.

[5] Grandmont, Jean-Michel: "Transformations of the Commodity Space, Behavioral Heterogeneity and the Aggregation Problem," *Journal of Economic Theory*, Vol. **57**(1992), pp. 1-35.

[6] Hofbauer, Joseph and Sigmund, Karl.: *Evolutionary Games and Replicator Dynamics*, Cambridge University Press, 1998. 邦訳: 竹内康博, 佐藤一憲, 宮崎倫子 (訳) 『進化ゲームと微分方程式』現代数学社, 2001 年.

[7] Judd, K.L.: "The Law of Large Numbers with a Continuum of IID Random Variables," *Journal of Economic Theory*, Vol.**35**, Issue, 1 (Feb., 1985), pp. 19-25.

[8] 吉川満: 「動学的マッチングと交渉のゲームにおける戦略的均衡の考察」早稲田大学大学院経済学研究科, 修士論文, 2004 年.

[9] 久保亮五: 「統計力学 新装版」共立出版, 2003 年.

[10] Mehta, M.L.: *Random Matrices*, Academic Press, 1991.

[11] 永尾太郎: 「ランダム行列の基礎」東京大学出版会, 2005 年.

[12] Rubinstein, Ariel and Wolinsky, Asher.: "Equilibrium in a Market with Sequential Bargaining," *Econometrica*, Vol. **53**, No. 5. (Sep., 1985), pp. 1133-1150.

[13] Osborne, Martin J. and Rubinstein, Ariel.: *Bargaining and Market*, Academic Press, 1990.

[14] Tokita, Keiichiro and Yasutomi, Ayumu.: "Mass extinction in a dynamical system of evolution with variable dimension," *Physical Reveview E*, Vol.**60**(1999), pp.842-847.

[15] Weibull, Jörgen W.: *Evolutionary Game Theory*, MIT Press,1995. 邦訳: 大和瀬達二 (監訳)『進化ゲームの理論』オフィス カノウチ, 1998 年.

[16] Wigner, Eugene P.: "Characteristic Vectors of Bordered Matrices With Infinite Dimensions," *The Annals of Mathematics, 2nd Ser.*, Vol. **62**, No. 3 (Nov., 1955), pp. 548-564.

[17] Wigner, Eugene P.: "On the Distribution of the Roots of Certain Symmetric Matrices," *The Annals of Mathematics, 2nd Ser.*, Vol. **67**, No. 2 (Mar., 1958), pp. 325-327.

[18] 吉田和男: 「複雑系経済学へのアプローチ」東洋経済新報社, 2002 年.