

発表時には予告なく変更予定

統計力学を用いた進化ゲーム 理論

D3

吉川 満

mitsurukikkawa@hotmail.co.jp

2007年度夏季研究会(関西学院大学) 第3日目(9月1日
(土)) 10:45-11:25

Ver. 8/24

目次

- 1. イントロ(動機・目的)
- 2. 先行研究
- 3. モデル
 - 3-1. 最近接相互作用(Isingタイプ)
 - 3-2. ランダムな相互作用(SKモデル)
- 4. TAP方程式
- 5. 結論+今後の課題

この論文の貢献

- 進化ゲーム理論に統計力学を用いて、定式化を行った。
- 具体的には、統計力学で最も簡単なIsingモデル、SKモデルを用いて、対称2人、非対称2人ゲームを定式化した。
 - 制御変数によっては既存の進化ゲーム理論と一致し、しない場合も存在。
 - 今後この論文を基礎として、大幅な拡張が可能。例えば動学。

動機・目的

- 高次元系を分析したい。

→しかし、数千、数万の方程式を取り扱うことは無理。

安定性に限っては、Routh-Hurwitzの定理から4本以上となると分からないに等しい。

分布関数を用いて、高次元系を分析する

→統計力学(statistical mechanics)と呼ばれている。

物理学では19世紀後半、古典力学の限界から統計力学が導入された。今では統計力学が物理学の主要な分野の1つに。今度経済学でもこのような考えが支配的になるか？

今までどのようにして高次元を分析してきたのか？

→ 平均のみを考え、低次元系へ。

例)

1. ミクロ： → Debreu and Scarf
(IER, 1963) (コアの極限定理) では

→ レプリカ経済を考える。

2. マクロ： ミクロ的基礎付けがあるマクロでは
→ 代表的(平均的)な個人・家計を考える。

様々な主体のいる経済学

- Debreu and Scarf (1963)のReplica経済のやり方に不満を持ち、多くの研究が行われている。→一般均衡理論の根本問題の1つ。代表的な主体の仮定を取り外す場合、一般均衡理論に社会的厚生関数を導入することで回避。
- 1)測度論一般均衡理論、2)動学的マッチングと交渉のゲーム3)統計力学を応用するのか

1)測度論一般均衡理論(→集計する)

Hildenbrand(JET,1971)、Malinvaud(JET,1972)、
Bhattacharya and Majumadar (JET, 1973)、
Hildenbrand(1974) etc

- Follmer (JME, 1974): 物々交換モデル。Isingモデルも使用。State: +1(所有), -1(なし)
- Hildenbrand(Econ, 1983): 積分(集計)を用いて、様々な人がいるを表現。
- Grandmont(JET, 1992): 物々交換モデル、様々な主体がいて、取引を行っている。測度論一般均衡の手法を用いて、分析。
→特に論文の最後で「統計力学」と用語を用いて、その重要性を説いている。

欠点: これらの一連の研究は測度論一般均衡の測度を分布関数と見れば、足りる。集計するので、各プレイヤーの行動に着目しないので、Gameにはならない。

2) 動学的マッチングと交渉のゲーム:

→1)の研究を基礎として、市場を交渉の束と見る。(詳しくは拙著:修士論文)

Rubinstein and Wolinsky(Econ, 1985),
Gale (Econ, 1986a,b), Osborne and
Rubinstein (1990), MacLennan and
Sonnenschein (Econ, 1991), Dagan ,
Serrano and Volij (ET, 2000), Gale
(2000), etc.

欠点:各交渉における外部性が存在せず、特殊な主体は交渉が成立せず、市場から出て行くことができない。その結果学習せざるを得ず、一種の代表・平均的な交渉のみの束と見ている。

3) 統計力学を応用

久保(2003): 各個人の所有する通貨の量の分布というものを確率的に考え、あるお金をN人で分配する。ただしここでの分配方は考えず、ありとあらゆる方法を考え、その中で各個人が得られる期待を考えた。その結果、人数が多くなるにつれて、公平な分配となるということを示している。

→欠点: 公平な分配方法と不平等極まりない分配法を等確率で実現するとしている(等重率の仮定) 経済学として考えた場合は不十分であろう。 等重率を課すところに工夫が必要。

- 吉田(2002): Isingモデルを経済学における協同現象とIncentiveの問題のモデルとして取り扱っている。なぜ、協同した方がよいのか？

→使用が限定されて、拡張が困難。

- Bouchard and Brezin (2000): ファイナンスのモデルにRandom行列を導入した。経済物理学の分野として使われている。多くが物理学の仮定(例: Gauss直行系など)をそのまま適用している。→経済学の仮定の下で、モデルを作る必要がある。

直接的な先行研究

- Diederich and Opper(PRA,1989)、Tokita and Yasutomi (PRE,1999): 進化ゲーム理論に統計力学を導入した。
 - Spin Glass で使われているSKモデルを直接応用し、定式化を行った。
 - そのため、物理学の仮定が課されており、不適ではないか？また既存の理論との対比が欠如し、分かりづらい。特にTokita and Yasutomi (1999)ではEuler法を使って、連続時間体系から離散時間体系へと変形している。確率変数もlogの形へ変形。多くの人が認める方法を用いていない。ただしシミュレーション結果は興味深いものとなっている。

Lotka-Volterra系

- Replicator系とは親戚関係。

$$dx/dt = A x$$

where A:Random行列, x : vector.

→GAM理論と呼ばれている。 Gardner and Ashby(Nature, 1970), May(Nature, 1972) 複雑さと安定性の関係に理論として調べている。

(背景:食物連鎖・生態系は安定)

先行研究(Diederich and Opper(1989), Tokita and Yasutomi (1999))は、この研究に触発されて行われた。

モデル:

戦略2つ、2タイプの主体のゲーム

- 多数の人がおり、2タイプの主体が1対1で出会い、ゲームをする。
- 特に第2節では最近接相互作用を考える。つまり i と j がゲームを行う。

(第3節では拡張する。)



格子モデル

例2.1, 2.2

	S1(1)	S2(2)
S1(1)	A,A	0,0
S2(2)	0,0	B,B

	S1(-1)	S2(+1)
S1(-1)	A,A	0,0
S2(+1)	0,0	B,B

where $A, B > 0$

Ising タイプ (最も構造
が分かりやすい。)

仮定2.3、命題2.4

- 仮定：各主体は高い利得・適応度を得ることを望んでいる。
- 命題：仮定のもとで主体 x のある戦略 $\{S_i\}, i=1, \dots, N$ を取り、ある利得 f を得るというゲームの状況下に戦略の分布は

$$P(\{S_i\}) = Z^{-1} \exp(\gamma f)$$

となる。ただし $\{S_i\}$ は主体 i の戦略、 γ は制御変数（例えば、正の情報）、 f はある戦略 $\{S_i\}$ を取ったときの利得・適応度、 Z は規格化定数を表している。

- 解釈：利得が高ければ、その戦略をとる確率が高い。
- 特徴：静学

伝統的な進化ゲーム理論

- 仮定: 各主体は高い利得・適応度を得ることを望んでいる。
- これを仮定すると、選択関数→Replicator方程式が一意に導出される。

Replicator 方程式

$$\dot{x}_i = x_i (f_i - \bar{f}), i = 1 \dots, N.$$

解釈: ある*i*番目の戦略は平均利得・適応度よりも高ければ、その戦略を選択する。

特徴: 動学

定義2.5

- 定義: 戦略が一定の秩序を持っているかどうかを判断する量を秩序パラメータ(order parameter) という概念を次のように導入する。

$$m = \frac{1}{N} \left\langle \sum_i S_i P(\{S_i\}) \right\rangle \equiv \frac{1}{N} \left\langle \sum_i S_i P(\{S_i\}) \right\rangle$$

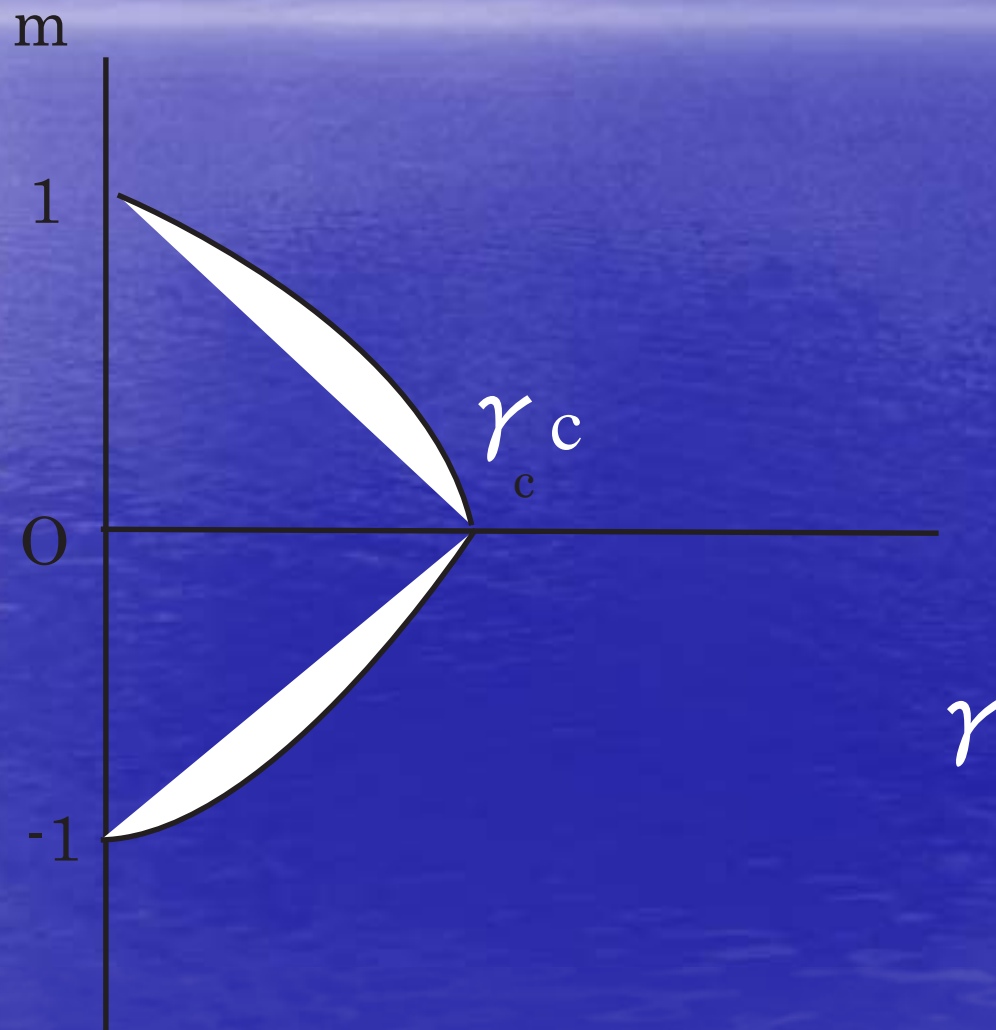
ただし、 $\langle \rangle$ は 平均を表している。

例2.6

- 例2.1を例にとる。このとき、
戦略1を確率1でとる場合、 $m=1/2$ 、
戦略2を確率1でとる場合、 $m=1$ 、
戦略1と2をランダムにとる場合、 $m=3/4$ 。
→ m の値は、 $1/2 \leq m \leq 1$ の間で、 $m=1/2$ に近ければ、戦略1を取る人が多いと分かり、 $m=1$ に近ければ、戦略2を取る人が多い。

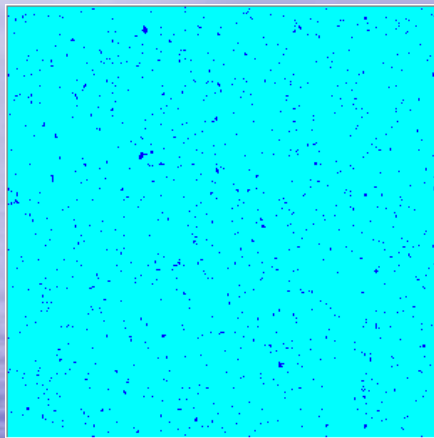
	S1(1)	S2(2)
S1(1)	A,A	0,0
S2(2)	0,0	B,B

- 例2.2のIsingモデル
- $S_i = \{-1, 1\} \rightarrow m = -1, 0(\text{random}), 1$



シミュレーションすると、

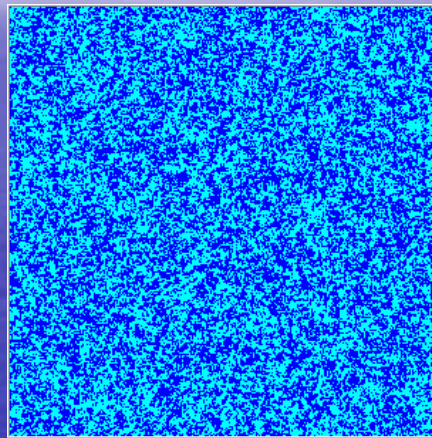
先ほどの分岐図は、格子図で見ると、次のような図である。水色＝戦略1、青＝戦略2



秩序相1

$$m > 0$$

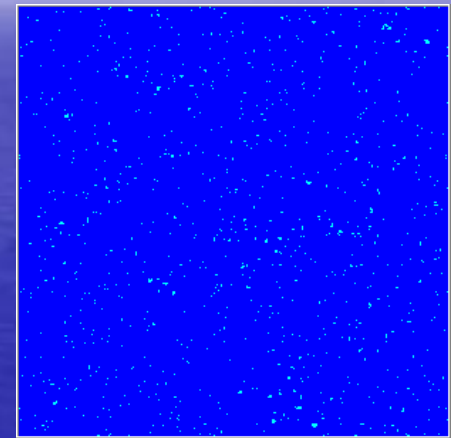
(戦略1,戦略1)



無秩序相

$$m = 0$$

戦略1と戦略2
がRandomに選択



秩序相2

$$m < 0$$

(戦略2,戦略2)

進化的に安定な戦略 (ESS) 定義

定義: Weibull(1995): $x \in \Delta$ が進化的に安定な戦略であるとは、どのような戦略 $y \neq x$ に対しても、ある $\varepsilon_y \in (0, 1)$ が存在し、すべての $\varepsilon \in (0, \varepsilon_y)$ について次の不等式が成り立つことをいう。

$$u[x, \varepsilon y + (1 - \varepsilon)x] > u[y, \varepsilon y + (1 - \varepsilon)x].$$

解釈: どのような突然変異戦略を採用したとしても、既存戦略の方が効用が高い。

命題2.8

命題: 定義2.7で定義した進化的に安定な戦略は次の条件と同値である。

Nash均衡

$$(2.4) \quad u(y, x) \leq u(x, x), \quad \forall y,$$

$$(2.5) \quad \begin{aligned} &u(y, x) = u(x, x) \\ &\Rightarrow u(y, y) < u(x, y), \end{aligned} \quad \forall y \neq x,$$

Replicator方程式の解である。

漸近安定条件

命題2.9

命題: 統計力学を用いた進化ゲーム理論において、
進化的に安定な戦略とは次の条件を満たすことと
同値である。

$$(2.4) \quad u(y, x) \leq u(x, x), \quad \forall y,$$

$$(2.6) \quad |m - m^*| < \varepsilon \quad ,$$

Lyapunov安
定条件

ただし、 m^* は制御変数 γ が最大時の m の
値を示している。

非対称2人ゲームへ拡張

- 秩序パラメータをもう1つ定義し、ESSについては、命題2.8の(2.6)の条件を次のように修正すれば、足りる。

$$(2.9) \quad \left| m'_1 - m^*_1 \right| < \varepsilon_1 \quad , \quad \left| m'_2 - m^*_2 \right| < \varepsilon_2$$

- Remark 2.10 例えばこの一般的な非対称2人ゲームは、売り手と買い手が様々な戦略を持って、ランダムにマッチし、Gameを行うという、Walrasのせり人不在の経済に対応している。

ランダムな相互作用(SKモデル)

Diederich and Oppen(1989)

- Replicator方程式:

$$\frac{dx_\nu}{dt} = x_\nu (f_\nu - \bar{f}), \quad \text{for } \nu = 1, \dots, N.$$

- 利得・適応度関数:

$$f = -H = \frac{1}{2} \sum_{\nu\mu} x_\nu c_{\nu\mu} x_\mu,$$

where, $f_\nu = \frac{\partial f}{\partial x_\nu}$, $c_{\nu\mu} = c_{\mu\nu}$ ($\mu \neq \nu$) Random行列の

要素であり、Gauss分布している。平均は0で、分散は1/N

以上の設定の下で、2つの戦略の分布を調べた。

クエンチ系の下で、Replica法を使うと、以下の関係が得られる。

$$u - v = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Delta}^{\infty} dz e^{-z^2/2} (z + \Delta),$$

$$(u - v)^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Delta}^{\infty} dz e^{-z^2/2} (z + \Delta)^2, \text{ where } \Delta = \sqrt{q}(u - 2v)$$

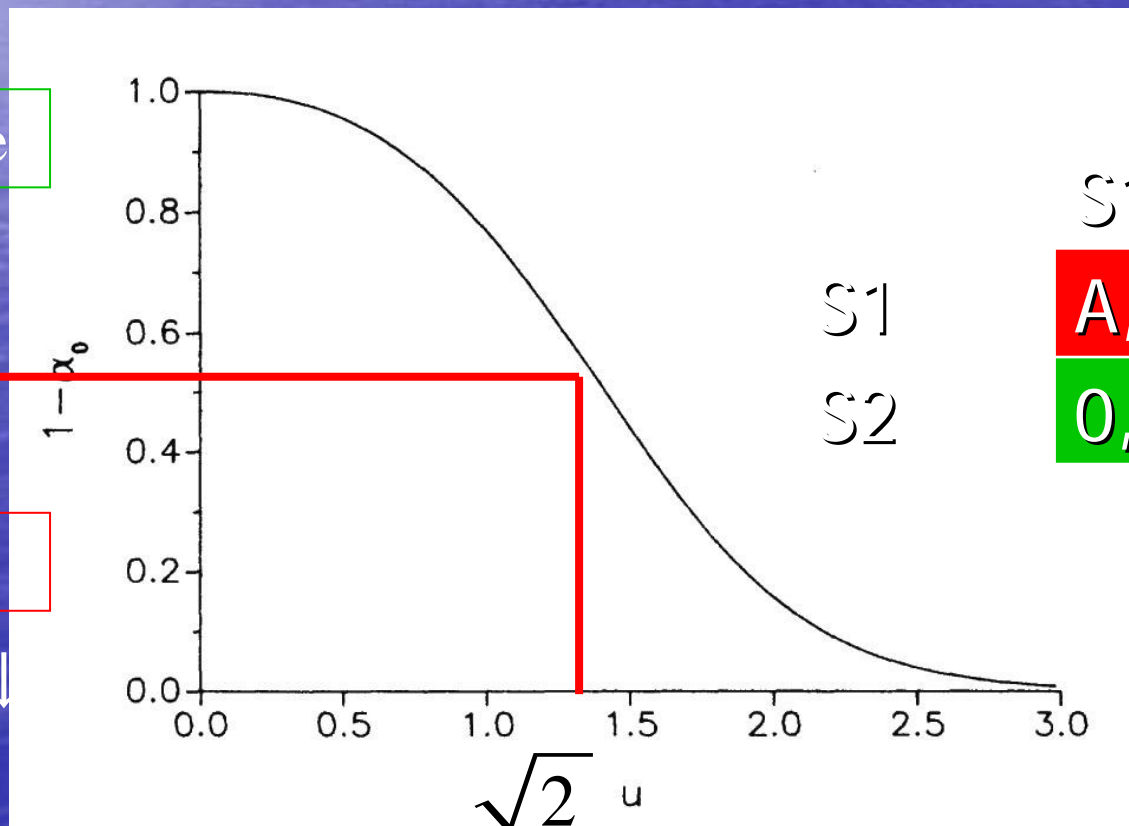
Competitive

↑ ↓、↓ ↑

0.5

Cooperative

↑ ↑、↓ ↓



S1

S2

S1

S2

A,A

0,0

0,0

B,B

制御変数 u

我々のモデル

- 第2節と同様Replicator方程式を用いない。
- 利得、ランダムマッチング

$$H(\{J_{ij}\}) = \sum_{i \neq j} J_{ij} S_i S_j$$

$$\text{where } P(J_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi J^2}} \exp\left\{-\frac{(J_{ij} - J_0)^2}{2J^2}\right\}$$

アンニール系を仮定

→経済主体はある程度自由にゲームをする相手を選ぶことができる。

- 自由エネルギー、分布関数の配位平均

$$F = \gamma \log \langle Z \rangle,$$

$$\langle Z \rangle = \sum_{\{S_i\}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{(ij)} dJ_{ij} P\{J_{ij}\} \exp(\gamma H\{J_{ij}\}),$$

$$= \sum_{\{S_i\}} \exp \left[\sum_{(ij)} \left\{ \gamma J_0 S_i S_j + \frac{(\gamma J)^2}{2} (S_i S_j)^2 \right\} \right]$$

計算すると、

$$F = \gamma \left[\sum_{[S_i]} \left\{ \gamma J_0 \left(\sum_i S_i \right)^2 + \frac{1}{2} (\gamma J)^2 \left(\sum_i S_i \right)^4 - \gamma J_0 N \sum_i S_i^2 - \frac{1}{2} (\gamma J)^2 N \sum_i S_i^4 \right\} \right]$$

- $m = \langle Si \rangle$ と置き、 m について微分すると、

$$\frac{\partial F}{\partial m} = 2\gamma^2 J_0 N^2 m + 2\gamma^3 J^2 N^4 m^3 = 0$$

$$m = 0 \quad \text{or} \quad \pm \sqrt{\frac{-J_0}{\gamma J^2 N^2}}$$

特に $N \rightarrow \infty$ とすると、 $m = 0$ となる。

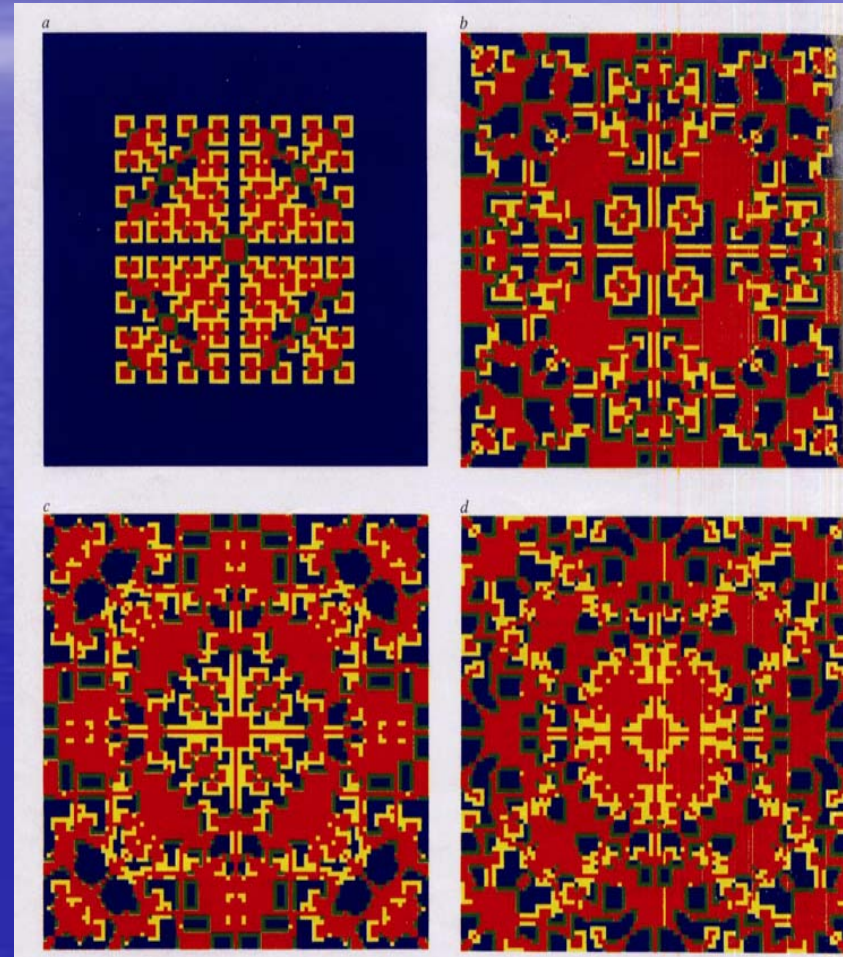
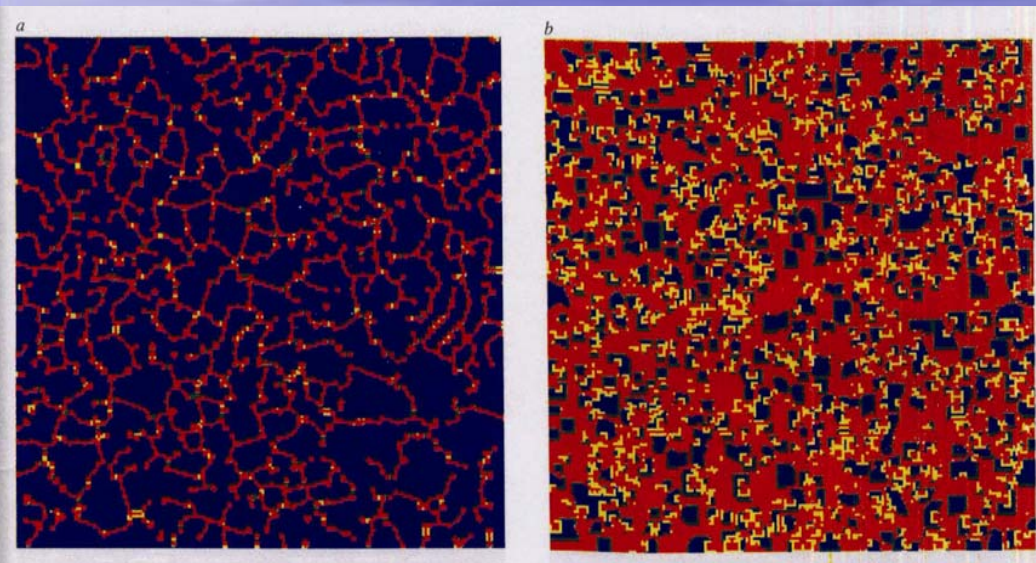
第2節と同様に、秩序変数は0の場合を+と-の値を持つ。
さらに無限人経済では秩序は存在しない。ことが分かった。

まとめ

- 第2節で、最近接とゲームを行うモデルの定式化を行った。
 - 第3節で、ランダムにマッチングし、ゲームを行うモデルの定式化を行った。
- 2つのモデルとも制御変数によって、ランダムになるものと、2つの秩序が存在するということを示した。また無限人経済では秩序はないことが分かった。

今後の課題: Master方程式を用いた、動学。

空間構造のある囚人のジレンマ ゲーム例: Nowak and May(1992)



青:C(cooperate), 赤D (defect)

黄 D following a C, 緑 C following a D

動学にすると、このような図の遷移を見ることができる。