

進化ゲーム理論から見た ファイナンス理論

Mitsuru KIKKAWA (吉川 満)

mitsurukikkawa@hotmail.co.jp

This File is available at

<http://kikkawa.cyber-ninja.jp/index.htm>



RESEARCH FIELD (THIS TALK)

- MATHEMATICAL FINANCE
- EVOLUTIONARY GAME THEORY
- REACTION-DIFFUSION SYSTEM (NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION)

OUR CONTRIBUTION

- 行使価格 K (既存の研究)

OUR CONTRIBUTION

- 行使価格 K (既存の研究)
→ $\bar{K}$ (平均行使価格)

OUR CONTRIBUTION

- 行使価格 K (既存の研究)
→ $\bar{K}$ (平均行使価格)
- 理由: オプション市場も自らの予想のみならず、他者の影響があるのでは？

OUR CONTRIBUTION

- 行使価格 K (既存の研究)
→ $\bar{K}$ (平均行使価格)
- 理由: オプション市場も自らの予想のみならず、他者の影響があるのでは？
- これを説明するモデリング・分析(ゲーム理論)
- 非線形偏微分方程式

Outline

1. Introduction
2. Black-Sholes Model
 - 2.1 Continuous model
 - 2.2 Discrete model
3. Extended Black-Sholes Model
4. Game Theoretic Model
5. Summary

1. INTRODUCTION

1. Introduction

2. Black-Sholes Model

2.1 Continuous model

2.2 Discrete model

3. Extended Black-Sholes Model

4. Game Theoretic Model

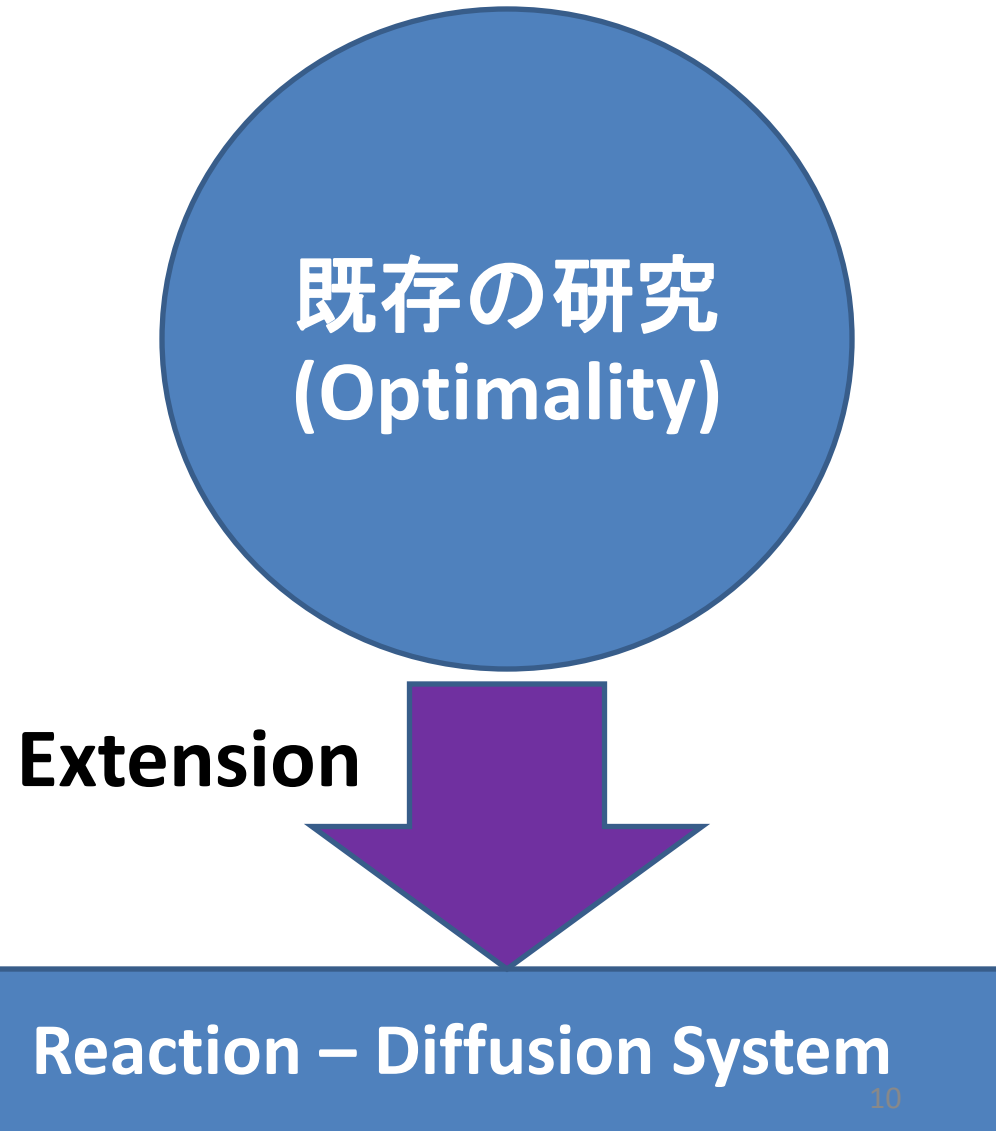
5. Summary

This Talk (Originality)

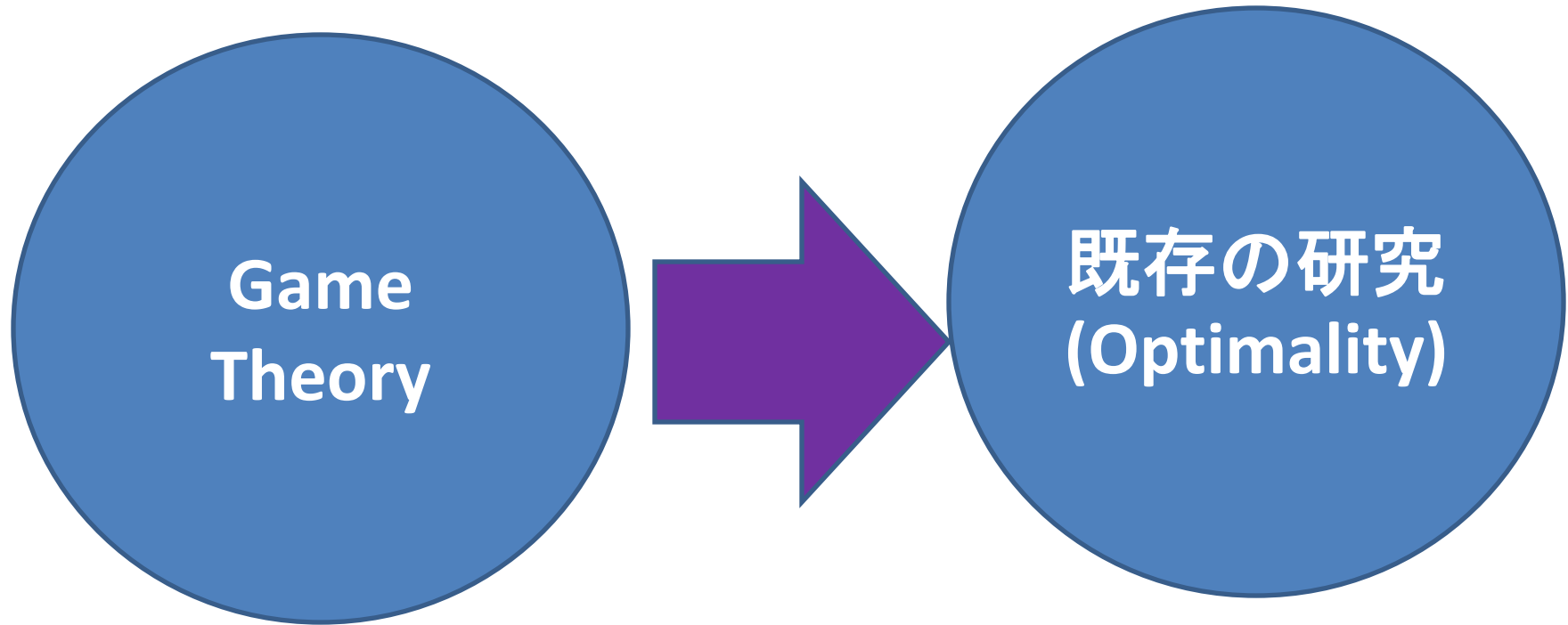


既存の研究
(Optimality)

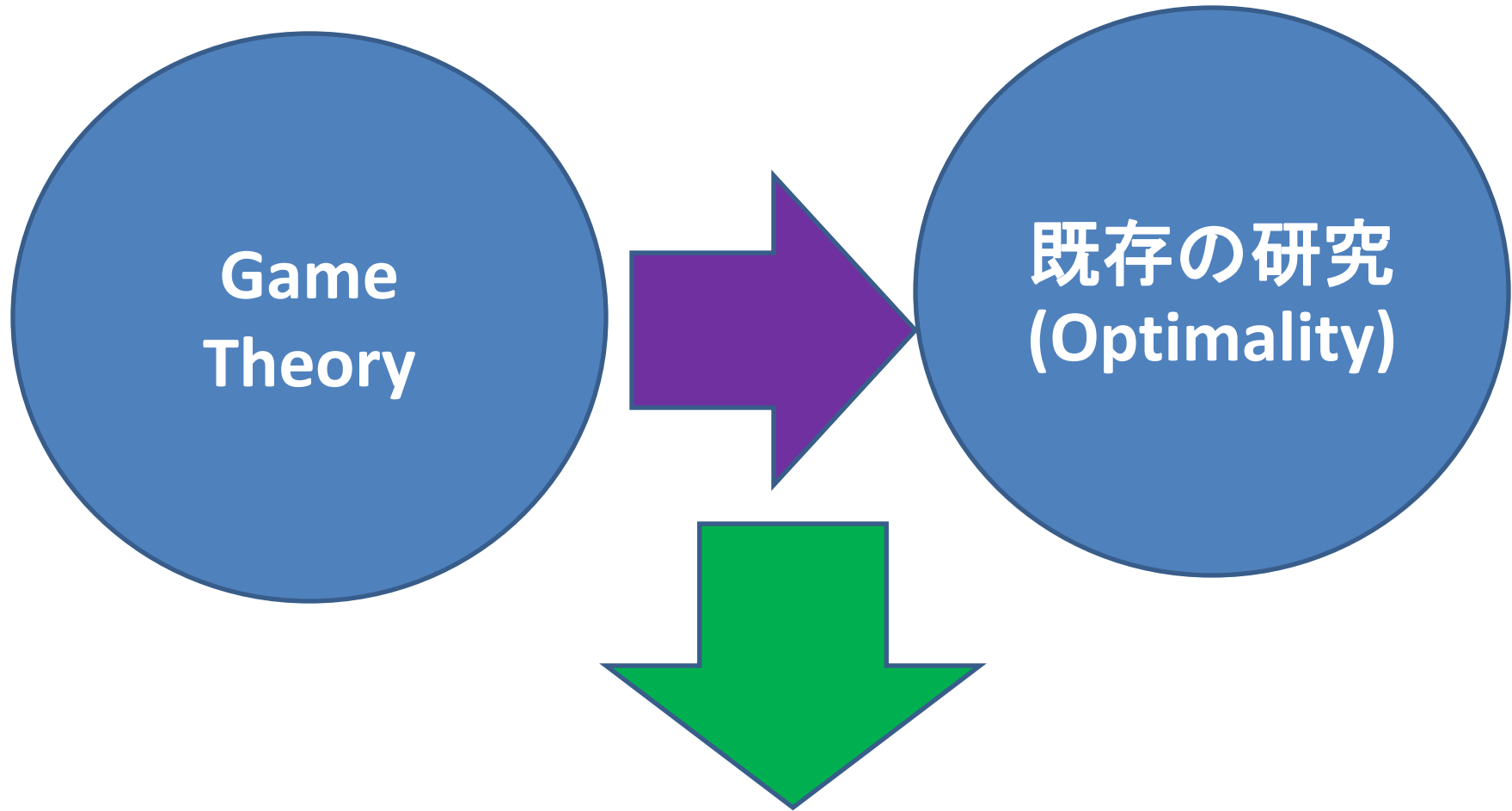
This Talk (Originality)



This Talk (Originality)



This Talk (Originality)



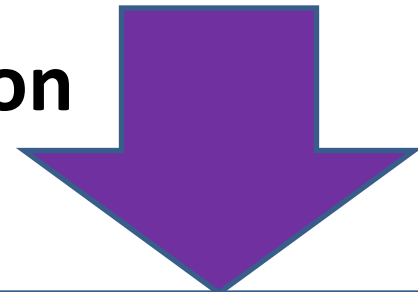
We can understand the players' action behavior.

This Talk (Originality)

Game
Theory

既存の研究
(Optimality)

Extension



Reaction – Diffusion System

This Talk (Originality)

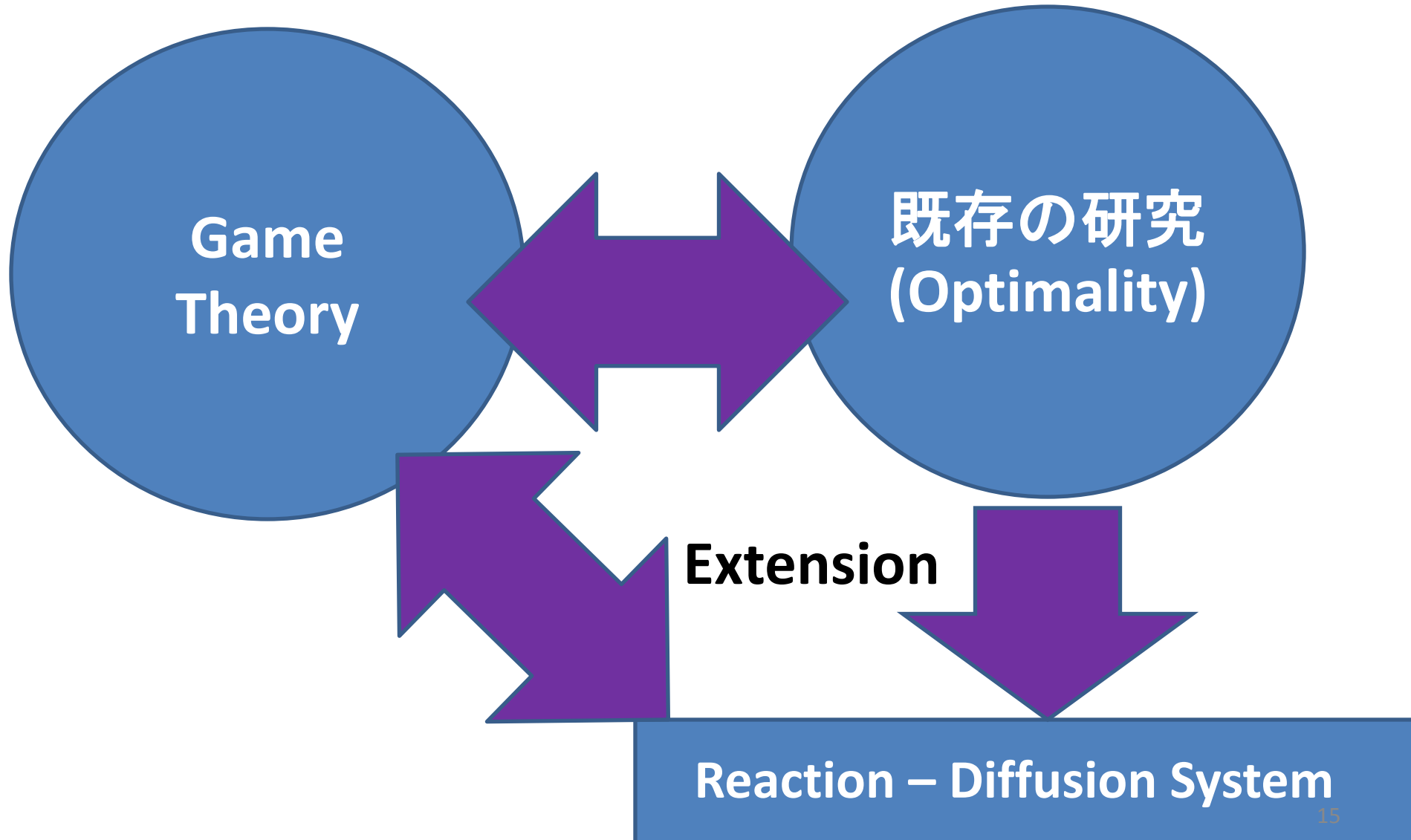
Game
Theory

既存の研究
(Optimality)

Extension

Reaction – Diffusion System

This Talk (Originality)



OPTION

- オプション(option) とは売買を行う権利のことであり、買い付ける権利をコール(call)、売り付ける権利をプット(put)と言います。

OPTION

- オプション(option)とは売買を行う権利のことであり、買い付ける権利をコール(call)、売り付ける権利をプット(put)と言います。
- 日本で取引されている株価指数オプションには、日経225オプション、日経300オプション(大阪証券取引所)、TOPIXオプション(東京証券取引所)。

[DATA] 大阪証券取引所日報

<http://www.nippo.ose.or.jp/pdf.html>

OPTION

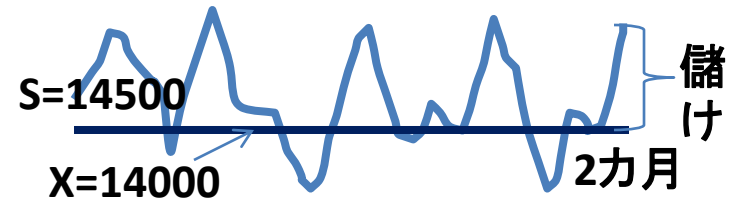
- オプション(option)とは売買を行う権利のことであり、買い付ける権利をコール(call)、売り付ける権利をプット(put)と言います。
- 日本で取引されている株価指数オプションには、日経225オプション、日経300オプション([大阪証券取引所](#))、TOPIXオプション([東京証券取引所](#))。

[DATA] 大阪証券取引所日報

<http://www.nippo.ose.or.jp/pdf.html>

- **Black-Sholesの公式・・・ヨーロッパ・オプションの価格評価公式**

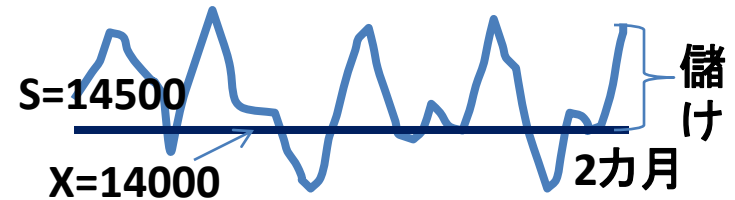
PROBLEM



- 次のヨーロピアン・コールオプションの価格を求めよ。

現在の株価 $S=14500$ 円, 権利行使価格 $K=14000$ 円, オプションの期間=2カ月, ボラティリティ $\sigma=38\%$, 非危険利子率 $r=6\%$

PROBLEM



- 次のヨーロピアン・コールオプションの価格を求めよ。

現在の株価 $S=14500$ 円, 権利行使価格 $K=14000$ 円, オプションの期間=2カ月, ボラティリティ $\sigma=38\%$, 非危険利子率 $r=6\%$

→あなたは上記の条件でいくら支払い購入する権利をするのか？

SOLUTION.

- **Black-Sholes Formula**

$$f(S, t) = S \cdot N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}} + \sigma\sqrt{x}\right) - K \cdot \exp(-rx) \cdot N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}\right).$$

SOLUTION.

- **Black-Sholes Formula**

$$f(S, t) = S \cdot N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}} + \sigma\sqrt{x}\right) - K \cdot \exp(-rx) \cdot N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}\right).$$

- オプションの期間 $T-t=2/12=0.1667$
- $u=\log(S/K)+(r-\sigma^2/2)(T-t)=0.0331$
- $u/\sigma\sqrt{x}+\sigma\sqrt{x}=0.3685$, $u/\sigma\sqrt{x}=0.2133$.
- 標準正規分布の数表から
- $N(u/\sigma\sqrt{x}+\sigma\sqrt{x})=0.6437$, $N(u/\sigma\sqrt{x})=0.5845$.
- 以上から, ヨーロピアンコールオプション価格は
 $f(S, t)=14500 \times 0.6437 - 14000 \times \exp(-0.06 \times 0.1667) \times 0.5845 = \mathbf{1232.0884}$ 円

SOLUTION.

- **Black-Sholes Formula**

$$f(S, t) = S \cdot N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}} + \sigma\sqrt{x}\right) - K \cdot \exp(-rx) \cdot N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}\right).$$

- オプションの期間 $T-t=2/12=0.1667$
- $u=\log(S/K)+(r-\sigma^2/2)(T-t)=0.0331$
- $u/\sigma\sqrt{x}+\sigma\sqrt{x}=0.3685$, $u/\sigma\sqrt{x}=0.2133$.
- 標準正規分布の数表から
- $N(u/\sigma\sqrt{x}+\sigma\sqrt{x})=0.6437$, $N(u/\sigma\sqrt{x})=0.5845$.
- 以上から, ヨーロピアンコールオプション価格は
 $f(S, t)=14500 \times 0.6437 - 14000 \times \exp(-0.06 \times 0.1667) \times 0.5845 = \mathbf{1232.0884}$ 円

⇒2ヶ月後の株価 > 15232円「儲け」
< 「損」

2. BLACK-SHOLES MODEL

1. Introduction

2. Black-Sholes Model

2.1 Continuous model

2.2 Discrete model

3. Extended Black-Sholes Model

4. Game Theoretic Model

5. Summary

Model Setting

- 確率空間($\Omega, \mathcal{F}, P$)
- 財: 危険資産(株価など)と安全資産(国債など)
- 危険資産は幾何ブラウン運動:

$$\underline{dS(t) = \mu S(t) dt + \sigma S(t) dZ(t)}, \quad (2.1)$$

μ : 期待収益率, σ : 株価ボラティリティ, $Z(t)=Z(t,\omega)$, ($\omega \in \Omega$), ブラウン運動



伊藤の補題

x を伊藤過程で $dx(t)=a(x,t)dt + b(x,t)dZ(t)$ とし, $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を2回連続可微分な関数であるとする. このとき, $Y(t)=F(x(t),t)$ によって定義される過程 Y もまた伊藤過程となり,

$$dY(t) = \left(\frac{\partial F}{\partial x} a + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial F}{\partial x} b dZ(t)$$

PROOF: 2変数のTaylor展開+確率論の知識

- 伊藤の補題から株価 S による派生証券の価格 $f(S,t)$ の微分 df は次に従う.

$$df = \left\{ \frac{\partial f}{\partial S} \cdot \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \cdot \sigma^2 S^2 \right\} dt + \frac{\partial f}{\partial S} \cdot \sigma S \cdot dZ$$

(2.2)

定義

- ポートフォリオ(portfolio)とはいくつかの株式, 債権, 通貨などの資産 $W_1, W_2, \dots, W_p$ の組み合わせのことをいう.

時点 t における資産の価格, 保有する資産の単位数をそれぞれ $W_i(t), n_i(t)$, $i=1, \dots, p$ とする. このときポートフォリオの価値 $W(t)$ は次を得る.

(2.3)

$$W(t) = n_1(t)W_1(t) + n_2(t)W_2(t) + \dots + n_p(t)W_p(t).$$

確率的な要素を消したい。

- ここで株価 S の株式を $\partial f / \partial S$ 単位買い, 価格 $f(S, t)$ の派生証券を1単位売るとする. このときのポートフォリオの価値は次を得る.

$$(2.4) \quad \frac{\partial f}{\partial S} \cdot S - f(S, t).$$

確率的な要素を消したい。

- ここで株価 S の株式を $\partial f / \partial S$ 単位買い, 価格 $f(S, t)$ の派生証券を1単位売るとする. このときのポートフォリオの価値は次を得る.

$$(2.4) \quad \frac{\partial f}{\partial S} \cdot S - f(S, t).$$

- (2.1), (2.4) を (2.2) に代入し、整理すると

$$(2.5) \quad \frac{\partial f}{\partial S} \cdot \Delta S - \Delta f = \left\{ -\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \cdot \sigma^2 S^2 \right\} \cdot \Delta t.$$

仮定3: 裁定機会が存在しない

- ここでこの仮定から安全資産の利子率を r とすると, 次が成り立つ.

$$(2.6) \quad \frac{\partial f}{\partial S} \cdot \Delta S - \Delta f = r \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial S} - f(S, t) \right) \Delta t.$$

仮定3: 裁定機会は存在しない

- ここでこの仮定から安全資産の利子率を r とすると, 次が成り立つ.

$$(2.6) \quad \frac{\partial f}{\partial S} \cdot \Delta S - \Delta f = r \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial S} - f(S, t) \right) \Delta t.$$

- (2.5), (2.6) から, 次が得られる.

$$r \cdot f(S, t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \cdot \sigma^2 S^2 + r \cdot \frac{\partial f}{\partial S} \cdot S,$$

$$(2.7) \quad \text{境界条件} \quad f(S_T, T) = \begin{cases} S_T - K, & S_T \geq K, \\ 0, & S_T < K. \end{cases}$$

(2.7) : Black-Sholes の偏微分方程式

あとはこの偏微分方程式を解くだけ。

- (2.7)を式変形すると、次の式を得る.

(2.8)
$$y_{uu}(u, \tau) = \frac{2}{\sigma^2} \cdot y_\tau(u, \tau),$$

ただし
$$\text{境界条件 } y(u, 0) = \begin{cases} K \cdot (e^u - 1), & u \geq 0, \\ 0, & u < 0. \end{cases}$$

$$f(S, t) = e^{-r(T-t)} \cdot y(u, \tau), u = \log \frac{S}{K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} (T-t) \right), \tau = T-t$$

あとはこの偏微分方程式を解くだけ。

- (2.7)を式変形すると、次の式を得る。

(2.8)
$$y_{uu}(u, \tau) = \frac{2}{\sigma^2} \cdot y_\tau(u, \tau),$$

ただし 境界条件
$$y(u, 0) = \begin{cases} K \cdot (e^u - 1), & u \geq 0, \\ 0, & u < 0. \end{cases}$$

$$f(S, t) = e^{-r(T-t)} \cdot y(u, \tau), u = \log \frac{S}{K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} (T-t) \right), \tau = T-t$$

解くと,

(2.9)
$$f(S, t) = S \cdot N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{\tau}} + \sigma\sqrt{\tau}\right) - K \cdot e^{-r\tau} \cdot N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{\tau}}\right).$$

Black-Sholesの(コール・オプション)の公式

別法

- Feynman-Kacの定理

関数 $\mu(t,x)$, $\sigma(t,x)$ に対して, 次の偏微分方程式を考える.

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + \mu(t, x) \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2(t, x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) - ru(t, x) = 0, \\ u(T, x) = \Phi(x). \end{cases}$$

このとき

$\begin{cases} dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \\ X_t = x, \end{cases}$
の解を X_t とする. $\sigma(t, X_t) \partial / \partial x u(t, x) \in L^2(F_t)$ のとき, (*)
の解は

$$u(t, x) = \exp[-r(T-t)] E_{t,x} [\Phi(X_T)]$$

で与えられる. ここで $E_{t,x}$ は $X_t = x$ となる確率過程 $\{X_t\}$ に関しての期待値とする.

比較静学

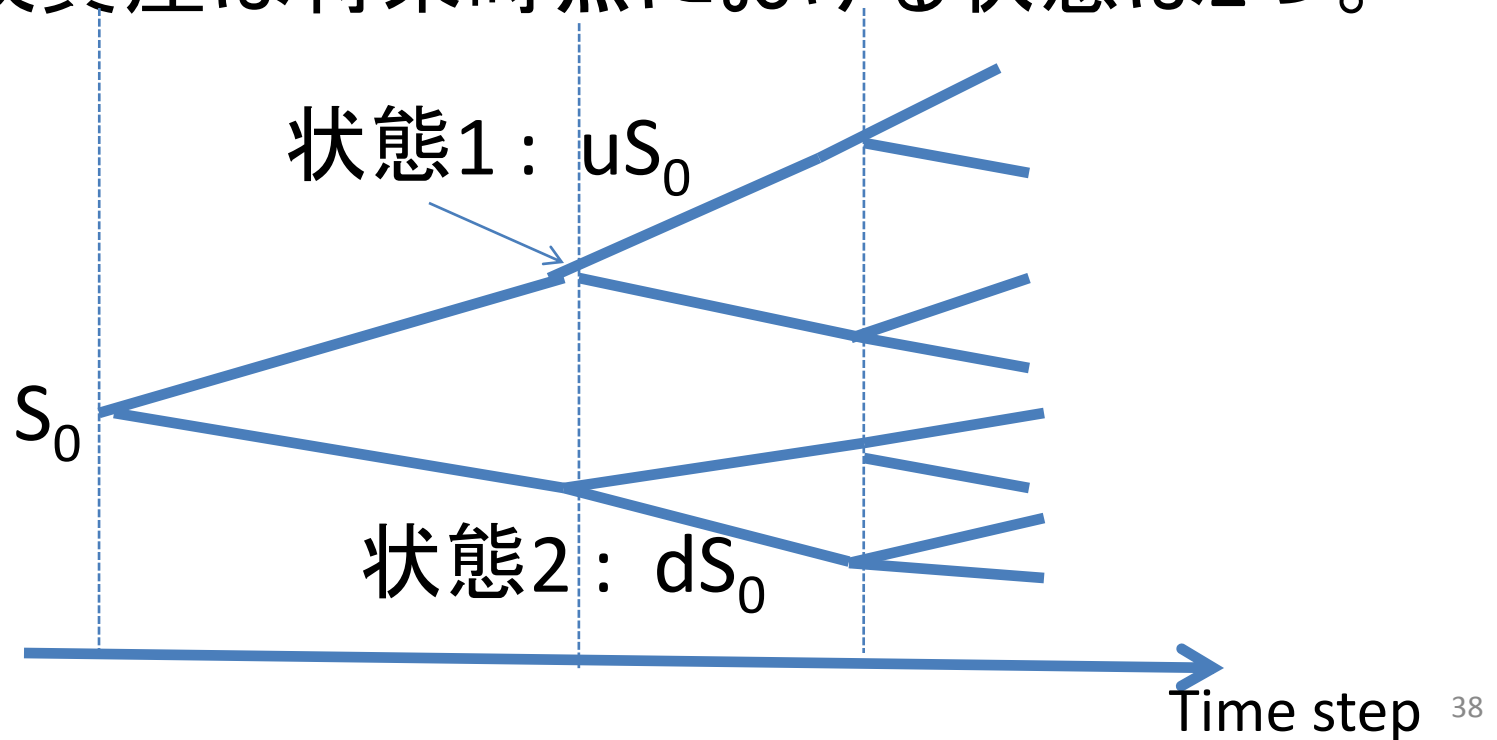
- 株価 S に関する導関数 $\Delta := \frac{\partial W}{\partial S} > 0$
- 株価に対する弾力性 $e_c = \frac{\partial C}{\partial S} \frac{S}{C} > 1$
- 行使価格に関する導関数 $\frac{\partial C}{\partial K} < 0$
- 利子率に関する導関数 $\rho := \frac{\partial W}{\partial r} > 0$
- 時間に関する導関数 $\Theta := \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial r} < 0$
- ボラティリティに関する導関数 $Vega := \frac{\partial W}{\partial \sigma} > 0$
- 株価に関する2回導関数 $\Gamma := \frac{\partial^2 W}{\partial S^2} > 0$

2. BLACK-SHOLES MODEL

1. Introduction
2. Black-Sholes Model
 - 2.1 Continuous model
 - 2.2 Discrete model
3. Extended Black-Sholes Model
4. Game Theoretic Model
5. Summary

Model

- 離散時間
- 財: 危険資産 (株価 s_0) と安全資産(価格 1)
- 危険資産は将来時点における状態は2つ。



仮定

- 無裁定条件が満たされるとする. そのため次を満たす.

$$(2.10) \quad 0 < d < r < u.$$

- 株価が n 時点において $S_0 u^k d^{m-k}$ となる確率は, ${}_nC_k p^k (1-p)^{n-k}$ であり, 2項分布に従う.
ただし株価が上昇する確率は p であり, その回数を k とする.

命題5

このモデルにおけるコール・オプション価格は
極限的に, (2.9) に一致する.

$$(2.11) \quad C = SB_a(n, p') - \frac{K}{r^n} B_a(n, p),$$

ただし $B_a(n, \tilde{p}) = \sum_{k=a}^n {}_n C_k \tilde{p}^{n-k} (1 - \tilde{p})^k$, $\tilde{p} = \{p, p'\}$, $p = \frac{r-d}{u-d}$, $p' = \frac{up}{r}$,

$$a = \left\lceil \frac{\log \frac{K}{d^n S}}{\log \frac{u}{d}} \right\rceil + 1, \quad [\cdot] \text{ はガウス記号}$$

Proof outline

- (2.11)と(2.9)を比較すると, 時間ステップを細かくする, つまり $n \rightarrow \infty$ のとき, 次の3つが成り立てば, 両者は一致することになる.

$$(1) B_a(n, p') = N(x), \quad (2) B_a(n, p) = N(x - \sigma\sqrt{t}),$$

$$(3) r^{-n} = e^{-r\tau}$$

ただし

$$x = \frac{\log \frac{S}{K} + \left(r + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t}{\sigma \sqrt{t}}, \quad N(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

3. EXTENDED BLACK-SHOLES MODEL

- 1. Introduction
- 2. Black-Sholes Model
 - 2.1 Continuous model
 - 2.2 Discrete model
- 3. Extended Black-Sholes Model
- 4. Game Theoretic Model
- 5. Summary

反応拡散系へ

- 連続時間
- アイディア:「熱方程式→熱源がある熱方程式へ(非線形偏微分方程式)」
- 熱源→相互作用に関連した項。
- 株価:幾何ブラウン運動(先ほど同様)

ポートフォリオの変更

- [想定している状況]

投資家は複数の財を保有しており、考察している株式以外の状況によって投資家の行動が変化する場合.

ポートフォリオの変更

- [想定している状況]

投資家は複数の財を保有しており、考察している株式以外の状況によって投資家の行動が変化する場合.

- (2.5) は次のように変更される.

$$(2.5') \quad \frac{\partial f}{\partial S} \cdot \Delta S - \Delta f = \left\{ -\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \cdot \sigma^2 S^2 \right\} \cdot \Delta t + \underline{g(S) \cdot \Delta t}$$

このような状況の下で解く

- この場合先ほどの熱方程式は次のように変更される。

$$(2.8') \quad w_{uu}(u, x) = 2w_x(u, x) + \underline{g(u, x)}$$

→非斉次の偏微分方程式(解の一意性など成り立つことが知られている)

このような状況の下で解く

- この場合先ほどの熱方程式は次のように変更される。

$$(2.8') \quad w_{uu}(u, x) = 2w_x(u, x) + \underline{g(u, x)}$$

→非斉次の偏微分方程式(解の一意性など成り立つことが知られている)

基本解 $U(u, v, x)$ を用いて解を得る.

$$w(u, \tau) = \int_{\Omega} U(u, v, \tau) w_0(v) dv + \int_0^{\tau} \int_{\Omega} U(u, v, \tau - s) g(v, s) dv ds.$$

ただし
$$U(u, v, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left(-\frac{(u-v)^2}{2x}\right)$$

このときのコール・オプションの公式

$$f(S, t) = S \cdot N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{\tau}} + \sigma\sqrt{\tau}\right) - K \cdot e^{-r\tau} \cdot N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) + \underline{G(S, t)}.$$

- ただし $G(S, t)$ は非斉次の項に関する項

有名な非斉次の熱方程式

例6)

(i) $g(u,x)=(u-a)(1-u^2)$, $-1 < a < 1$, **Allen-Cahn
方程式**

(ii) $g(u,x) = |u|^{p-1} u$, $p > 1$ ときの解の爆発
について

有名な非斉次の熱方程式

例6)

(i) $g(u,x)=(u-a)(1-u^2)$, $-1 < a < 1$, **Allen-Cahn
方程式**

(ii) $g(u,x) = |u|^{p-1} u$, $p>1$ ときの**解の爆発
について**

(iii) **ファイナンスにおける良い非斉次の
項を見つけることも重要。**

4. GAME THEORETIC MODEL

1. Introduction
2. Black-Sholes Model
 - 2.1 Continuous model
 - 2.2 Discrete model
3. Extended Black-Sholes Model
4. Game Theoretic Model
5. Summary

では売り手と買い手の行動から考えるとどのようなBLACK-SHOLESの公式が導かれるのか？

Model

- 連続時間
- 危険資産: 幾何ブラウン運動
- 主体: 売り手と買い手 (非対称2人ゲーム)
- δt の間に, 現在の株価を見て、自分と相手の利得を勘定し、自らの戦略を決定するという
ことを行っている。
- 戦略: 2つ。例: {bear, bull} など
- 利得: 売り手: $K(t)-S(t)$, 買い手: $S(t)-K(t)$
- →ゼロサム型

- 利得表

	戦略1	戦略2
戦略1	$a(t), -a(t)$	$0, 0$
戦略2	$0, 0$	$b(t), -b(t)$

- 上の利得表は相対的な「利得差」を表している。

- 利得表

	戦略1	戦略2
戦略1	$a(t), -a(t)$	$0, 0$
戦略2	$0, 0$	$b(t), -b(t)$

- ↑の利得表は相対的な「利得差」を表している。

このときのReplicator 方程式

- $$\dot{s}_1 = s_1(1-s_1)\{a(t) - (a(t) + b(t))s_2\},$$

- $$\dot{s}_2 = s_2(1-s_2)\{-a(t) + (a(t) + b(t))s_1\},$$

s_1 を主体1が戦略1を採用する確率, s_2 を主体2が戦略2を採用する確率

REVIEW: Replicator Equation

REPLICATOR EQ.

$$\dot{x}_i = x_i \left((Ax)_i - x \cdot Ax \right), i = 1, \dots, n.$$

If the player's payoff from the outcome i is greater than the expected utility $x \cdot Ax$, the probability of the action i is higher than before. And this equation shows that the probability of the action i chosen by another players is also higher than before (**externality**). Furthermore, the equation is derived uniquely by the **monotonic** (that is if one type has increased its share in the population then all types with higher profit should also have increased their shares).

Two Strategies

$$\dot{x} = x(1-x)\{b - (a+b)x\} \dots (*)$$

Classification:

(I) **Non-dilemma**: $a > 0, b < 0$, ESS : one

(II) **Prisoner's dilemma** : $a < 0, b > 0$, ESS : one

(III) **Coordination** : $a > 0, b > 0$, ESS two

(IV) **Hawk-Dove** : $a < 0, b < 0$, ESS one (mixed strategy)

		1	2
		S 1	S 2
1	S 1	a,a	0,0
	S 2	0,0	b,b

Payoff Matrix

平衡点とその安定性

- このときの平衡点は純粋戦略の組み4つと、内点解(=混合戦略)の5つ存在する.

平衡点とその安定性

- このときの平衡点は純粋戦略の組み4つと、内点解(=混合戦略)の5つ存在する.
- ESSは内点解。

平衡点とその安定性

- このときの平衡点は純粋戦略の組み4つと、内点解(=混合戦略)の5つ存在する.
- ESSは内点解。

補題 ノイズがない場合の内点の安定性はリミットサイクルであり, またノイズがある場合もリミットサイクルである.

この場合のBlack-Sholesの公式

- 前に取り上げたBlack-Sholesモデルにおいて、行使価格の影響があるのは、境界条件を使用するとき。

この場合のBlack-Sholesの公式

- 前に取り上げたBlack-Sholesモデルにおいて、行使価格の影響があるのは、境界条件を使用するとき。
- よって、 $K := \bar{K}$ とすればよい。つまり

$$f(S, t) = S \cdot N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{\tau}} + \sigma\sqrt{\tau}\right) - \bar{K} e^{-r\tau} \cdot N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{\tau}}\right).$$

ただし $\bar{K} =$ 平衡時の戦略1における行使価格 $\cdot s_1^*$
+ 平衡時の戦略2における行使価格 $\cdot (1 - s_1^*)$
 s_1^* は混合戦略を採用する場合の確率。

離散時間の場合

- 2項モデルを参考
- 危険資産:「上がる」or「下がる」
- 主体1が戦略1を採用する確率 p'' とし, それを採用する回数を k とすると, n ステップ後の戦略1を取る確率は ${}_nC_k p''^k (1-p'')^{n-k}$ であり、このときの期待利得は ${}_nC_k p''^k (1-p'')^{n-k} \left(\sum_{k=a}^n a(k) + \sum_{k \neq a}^{n-k} b(k) \right)$.

注) 通常進化ゲーム理論では、平衡状態のときに利得を得るとしているが、ここでは每期ごとに利得を仮想的に得ることを考えている。

命題8

- このゲームにおけるコール・オプション価格は次のようになる。またこのときの各主体の期待利得は正規分布に従っている。

$$(4.3) \quad C = SB_a(n, p') - \frac{\bar{K}}{r^n} B_a(n, p),$$

$$B_a(n, \tilde{p}) = \sum_{k=a}^n {}_n C_k \tilde{p}^{n-k} (1 - \tilde{p})^k, \quad \tilde{p} = \{p, p'\}, \quad p = \frac{r-d}{u-d}, \quad p' = \frac{up}{r},$$

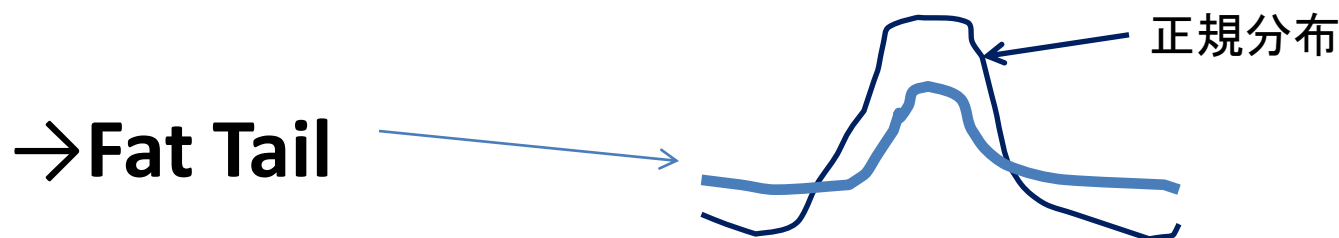
$$a = \left\lceil \frac{\log \frac{\bar{K}}{d^n S}}{\log \frac{u}{d}} \right\rceil + 1,$$

ただし $\bar{K}$ = 平衡時の戦略1における行使価格 p'^{*} + 平衡時の戦略2における行使価格 $(1 - p'^{*})$
 p'^{*} は混合戦略を採用する場合の確率.

拡張モデル

- 前節(反応拡散系)と同様に株価間に影響がある場合。
- ここでは $p_1 = p'' - \varepsilon$, $p_2 = p'' + \varepsilon$ ($\varepsilon \neq 0$)

命題9 コール・オプション価格は(4.3)に一致するが、またこのときの各主体の期待利得は正規分布に従わない。



発展の方向性 その1

**主体に完全記憶がある場合
(PERFECT MEMORY)**

GAME WITH PERFECT RECALL

定義 展開形ゲーム Γ が**完全記憶ゲーム**であるとは、すべてのプレイヤー i ($i=1, \dots, n$) のすべての情報集合 $u, v \in U_i$ に対して、もし v のある手番 y が u から枝 c によって到達可能ならば、 v のすべての手番が同じ枝 c によって u から到達可能であることである。

- 完全記憶ゲームではすべてのプレイヤーは各手番において,
 - (1) 過去の自分の手番でのすべての選択, および
 - (2) 過去の自分の手番で利用可能であったすべての情報を記憶している. 完全情報ゲームは, 完全記憶ゲームの特別な場合である.

- (4.4) 確率変数列 $\{X_n; n=0,1,\dots\}$, 任意の $n=1,2,\dots$, 任意の $s_0,\dots, s_n$ に対して,

$$P(X_n=s_n \mid X_0=s_0, \dots, X_{n-1} = s_{n-1})$$

Method

- Step1) This game is a Martingale or not.

→Yes

- Step 2) Apply Optimal Stopping Theorem (Stopping time is finite)
- Step 3) Derive Wald 's equation
- Step 4) Derive a Nash Equilibrium.

- We apply this Method to **Repeated Game** (Section 3) and **Stochastic Evolutionary Game** (Section 4).

定理 11. (積に関するWaldの方程式) X_n は確率変数とする.
 T が $E(T) < \infty$ を満たす停止時間, μ は X_n の平均であり, 有限の値であるとき,

$$E(X_1 \times \dots \times X_T) = \mu^{E(T)}$$

が成り立つ.

補題 (積のマルチンゲールに関する角谷の定理) $X_1, X_2, \dots$ を非負独立確率変数列で, 各々の平均は1であるとする.
 $M_0 = 1$ と定義し, $n \in \mathbb{N}$ に対して $M_n := X_1 X_2 \dots X_n$ とする. このとき M は非負マルチンゲールであり, $M_\infty := \lim M_n$ が a.s. に存在する. そして以下の(i)-(v) は同値である.

- (i) $E(M_\infty) = 1$, (ii) L^1 の意味で $M_n \rightarrow M_\infty$ 、
- (iii) (M) は一様可積分(UI), (iv) $\prod a_n > 0$, ただし $0 < a_n := E(X^{(1/2)}_n) \leq 1$, (v) $\sum (1 - a_n) < \infty$

もし上の5つのどれか1つ成り立たないときには,

$$P(M_\infty = 0) = 1 \text{ である.}$$

Outline of the Proof :

- $X_1, X_2, \dots$ を独立な非負確率変数の列, $E(X_k) = \mu, \forall k$ とし, $M_0 = \mu, F_0 = \{\phi, \Omega\}$ として, $M_n = X_1 X_2 \dots X_n, F_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n), Y_n = M_n - \mu^n$ と置く.

Step 1) Y_n はMartingale であるかどうか？

M_n : マルチンゲール $\rightarrow Y_n$: マルチンゲール.

- $n \geq 1$ に対して、

$E(M_n | F_{n-1}) = E(M_{n-1} X_n | F_{n-1}) = M_{n-1} E(X_n | F_{n-1}) = M_{n-1} E(X_n) = \mu M_{n-1}$
をa.s. の意味で得る. よって $\mu=1$ のときマルチンゲールである。
上式の両辺を μ^n で割ると, $E(M_n / \mu^n | F_{n-1}) = M_{n-1} / \mu^{n-1}$
 $\rightarrow M_n / \mu^n$ はマルチンゲールである.

Step 2) 積のマルチンゲールに関する角谷の定理から

$$E(|Y_{n+1} - Y_n| | F_n) = E(M_n (1 - X_n) | F_n) < \infty$$

Step 3) 任意の停止定理の条件を満たすか？

$\rightarrow$ Yes. $E(Y_T) = E(Y_0) = \mu, \forall T$ となる。これから

$$E(Y_n) = E(M_n - \mu^n) = (X_1 - \mu) = 0. \text{ よって } E(M_n - \mu^n) = 0, \\ E(X_1 \times \dots \times X_n) = \mu^n. \quad (\text{証終})$$

Method

- Step1) This game is a Martingale or not.

→Yes

- Step 2) Apply Optimal Stopping Theorem (Stopping time is finite)
 - Step 3) Derive Wald 's equation
 - Step 4) Derive a Nash Equilibrium.
-
- We apply this Method to **Repeated Game** (Section 3) and **Stochastic Evolutionary Game** (Section 4).

命題10 この完全記憶があるゲームはマルチンゲールである。

• ノイズ

$$P(X_n = S_n + \varepsilon \mid X_0 = S_0, \dots, X_{n-1} = S_{n-1})$$

命題10' 平均が0であるような無相関のノイズがある完全記憶があるゲームはマルチンゲールであり, 平均が0でないような相関のあるノイズがある完全記憶があるゲームはマルチンゲールではない。

命題12

- コール・オプション価格は (4.3)と同様の形をしているが, このときの平均行使価格は異なる.

Method

- Step1) This game is a **Martingale** or not.

→Yes

- Step 2) Apply **Optimal Stopping Theorem** (Stopping time is finite)
- Step 3) Derive **Wald 's equation**
- Step 4) Derive a **Nash Equilibrium.**

- We apply this Method to **Repeated Game** (Section 3) and **Stochastic Evolutionary Game** (Section 4).

EXAMPLE (Prisoner's Dilemma Game)

• 利得表1

	戦略C	戦略D
戦略C	R, R	S, T
戦略D	T, S	P, P

利得表1'

	戦略C	戦略D
戦略C	R', R'	S', T'
戦略D	T', S'	P', P'

ただし $T > R > P > S$, 利得表1' は停止時間(有限)までの平均期待利得を表している。

- Pareto 最適な協調行動(C,C) を実現するためには Nash 均衡条件から, $R' \geq T'$ かつ $S' \geq P'$ という条件が必要である。これから $1 \geq p^* \geq \frac{T'}{R'+T'} \geq 0$ かつ $1 \geq p^* \geq \frac{S'}{S'+P'} \geq 0$.

よって

$$1 \geq p^* \geq \max \left\{ \frac{T'}{R'+T'}, \frac{S'}{S'+P'}, 0 \right\}.$$

を得る。 p^* :停止時間まで戦略Cを取る平均確率.

EXAMPLE (Prisoner's Dilemma Game)

• 利得表1

	戦略C	戦略D
戦略C	R, R	S, T
戦略D	T, S	P, P

利得表1'

	戦略C	戦略D
戦略C	R', R'	S', T'
戦略D	T', S'	P', P'

期待利得を使って、
One-Shot のゲームに

ただし $T > R > P > S$, 利得表1' は停止時間(有限)がある。

- Pareto 最適な協調行動(C,C) を実現するためには Nash 均衡条件から, $R' \geq T'$ かつ $S' \geq P'$ という条件が必要である。これから $1 \geq p^* \geq \frac{T'}{R'+T'} \geq 0$ かつ $1 \geq p^* \geq \frac{S'}{S'+P'} \geq 0$.

よって

$$1 \geq p^* \geq \max \left\{ \frac{T'}{R'+T'}, \frac{S'}{S'+P'}, 0 \right\}.$$

を得る。 p^* :停止時間まで戦略Cを取る平均確率。

この結果が示唆していること

- 有限回繰り返しゲーム理論は通常非協調な戦略がNash均衡であることが知られている。
→ 停止時刻まで足し合わせ、最適な行動の経路を導出。
- これに対して、Friedman(1985)は ε 均衡 (ε の範囲内でNash均衡よりも良い戦略がある、一種の認識のズレ)を導入し、協調の可能性を示した。
- 我々のものは、途中でこのゲームを認識し、平均的な利得を計算し、戦略を決定するので、その最適からのズレから、協調行動の可能性を示唆している。

5. SUMMARY

1. Introduction
2. Black-Sholes Model
 - 2.1 Continuous model
 - 2.2 Discrete model
3. Extended Black-Sholes Model
4. Game Theoretic Model
5. Summary

Summary

- レビュー:

Black-Sholesの公式(連続時間と離散時間)

-

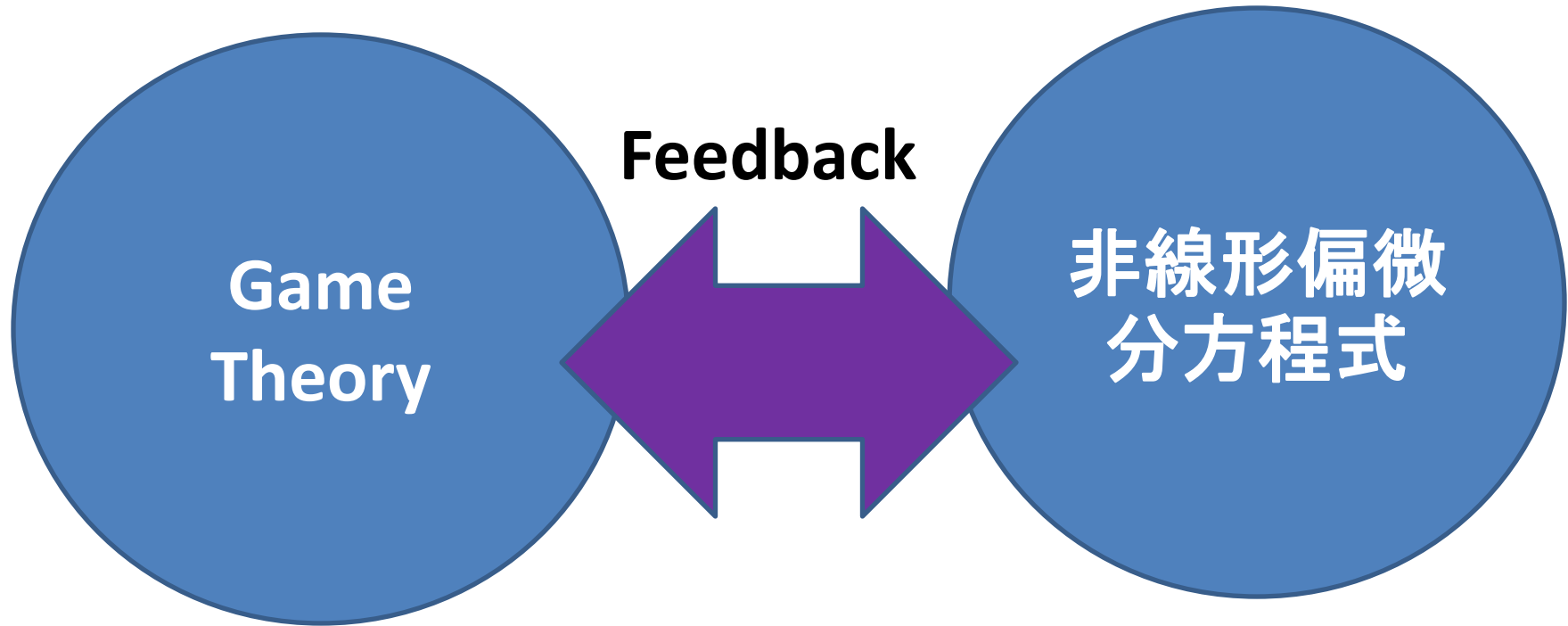
Summary

- レビュー:
Black-Sholesの公式(連続時間と離散時間)
- 拡張:
- 反応拡散系のモデルへ(ここでは熱源のあるモデル)

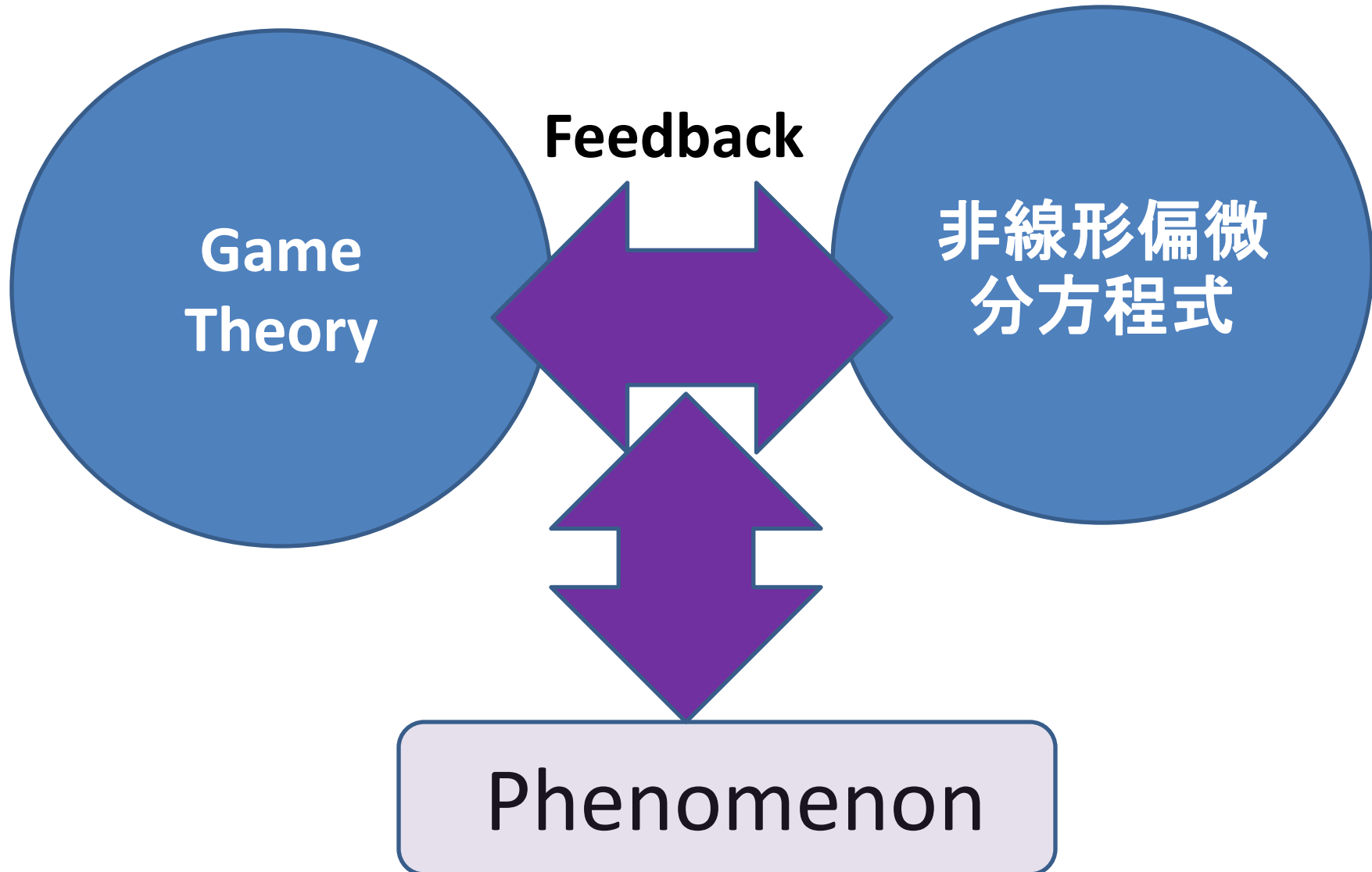
Summary

- レビュー:
Black-Sholesの公式(連続時間と離散時間)
- 拡張:
- 反応拡散系のモデルへ(ここでは熱源のあるモデル)
- またゲーム理論の立場で、Black-Sholesの公式を導出(行使価格を平均行使価格へ)。
- ノイズを導入, 主体に完全記憶がある場合、Fat-tail の導出。

Future Works.



Future Works.



FUTURE WORKS

- 非線形偏微分方程式の研究：

非線形項による「爆発」の問題

Black-Sholes経済では、「Jump = Stop高」の概念を入れるのが難しかった。

- ファイナンス特有の非斉次の項を見つける。

- ゲーム理論の研究の方向：

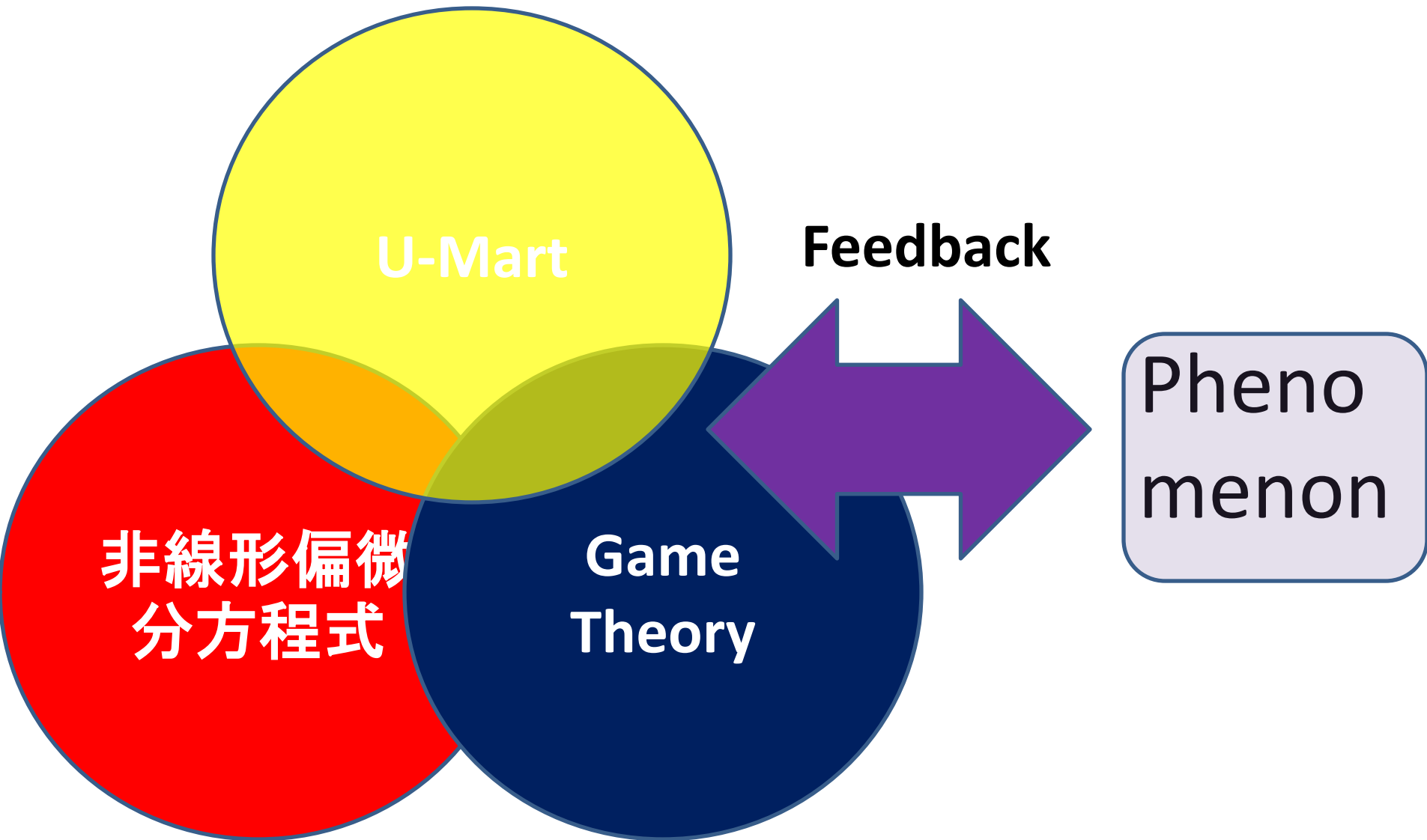
「リスクに対する態度(非線形効用関数)」

(行動ファイナンス)

FUTURE WORKS

- U-Mart (<http://www.u-mart.org/html/>)
- Option Market の人工市場

Future Works.



REFERENCE

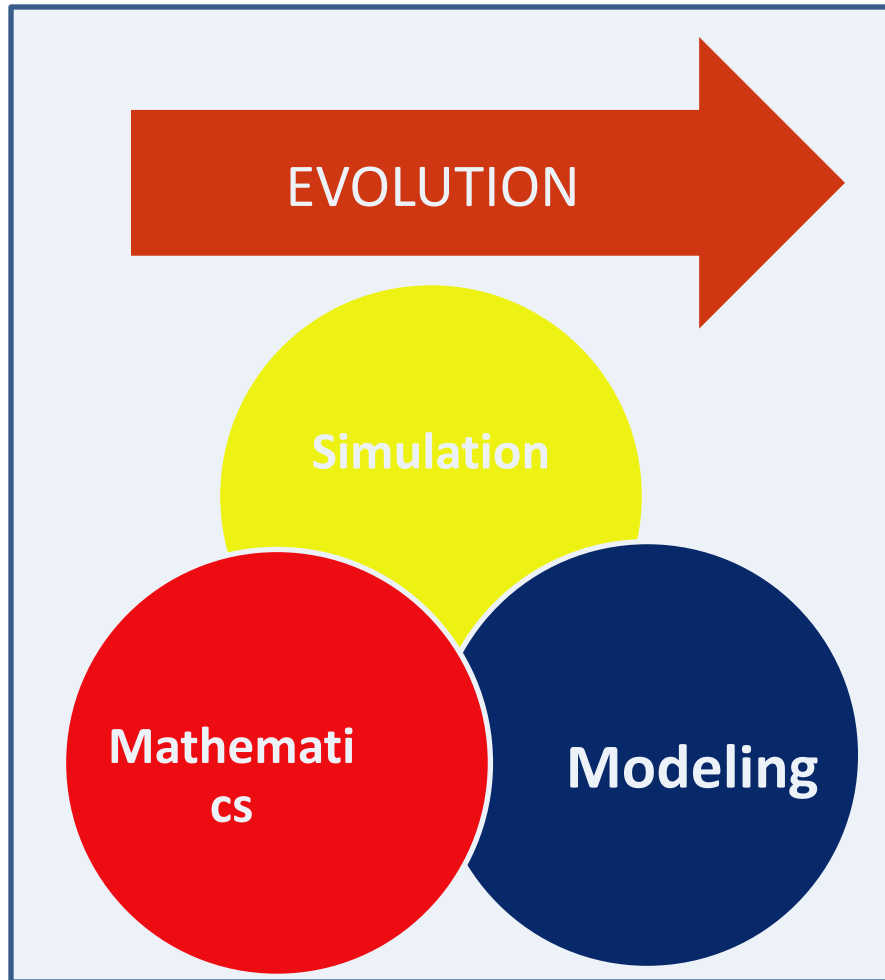
- [1] Black, F. and Scholes, M. (1973): "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *The Journal of Political Economy*, Vol.81, pp.637-654. [\[PDF\]](#)
- [2] Cox, John C., Ross, Stephen A. and Rubinstein, Mark (1979): "Option Pricing: A Simplified Approach," *Journal of Financial Economics*, Vol.3, pp.145-166. [\[PDF\]](#)
- [3] 吉川 満 (2009): 「進化ゲーム理論における共進化と多様性：確率的環境の場合」『進化経済学論集』第13号, 印刷中. [\[PDF\]](#)
- [4] 関根 順 (2007): 「数理ファイナンス」培風館. [\[AMAZON\]](#)

Thank you for your attention.

Mitsuru KIKKAWA (mitsurukikkawa@hotmail.co.jp)

This File is available at

<http://kikkawa.cyber-ninja.jp/index.htm>



PHENO
MENO
N

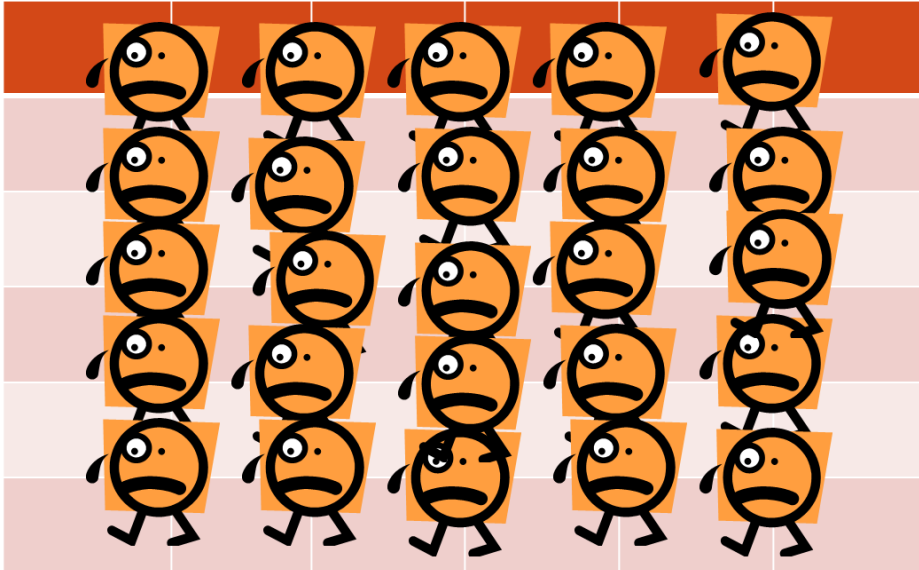
MITSURU KIKKAWA

<http://kikkawa.cyber-ninja.jp/index.htm>

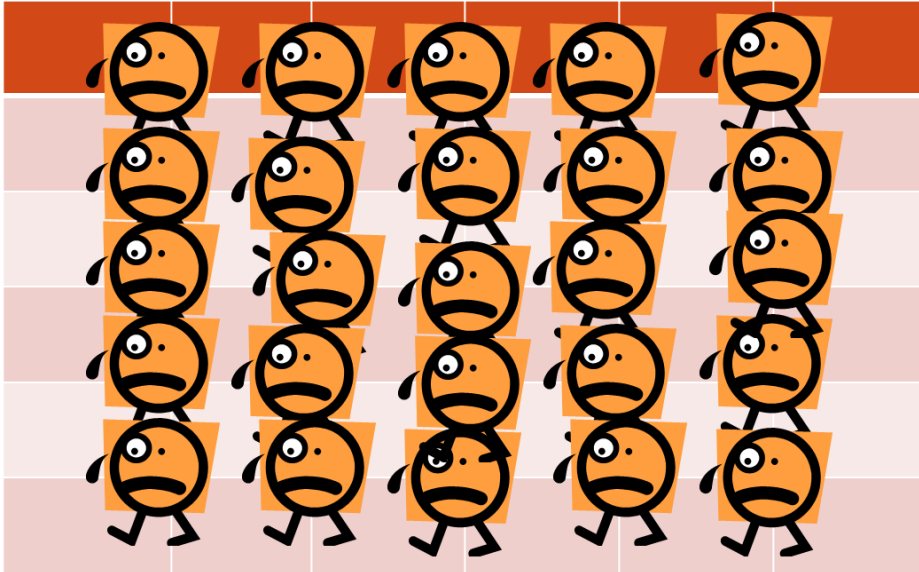
おまけ (EVOLUTIONARY GAME THEORY)

PRELIMINARIES

Situation (Traditional Evolutionary Game Theory)



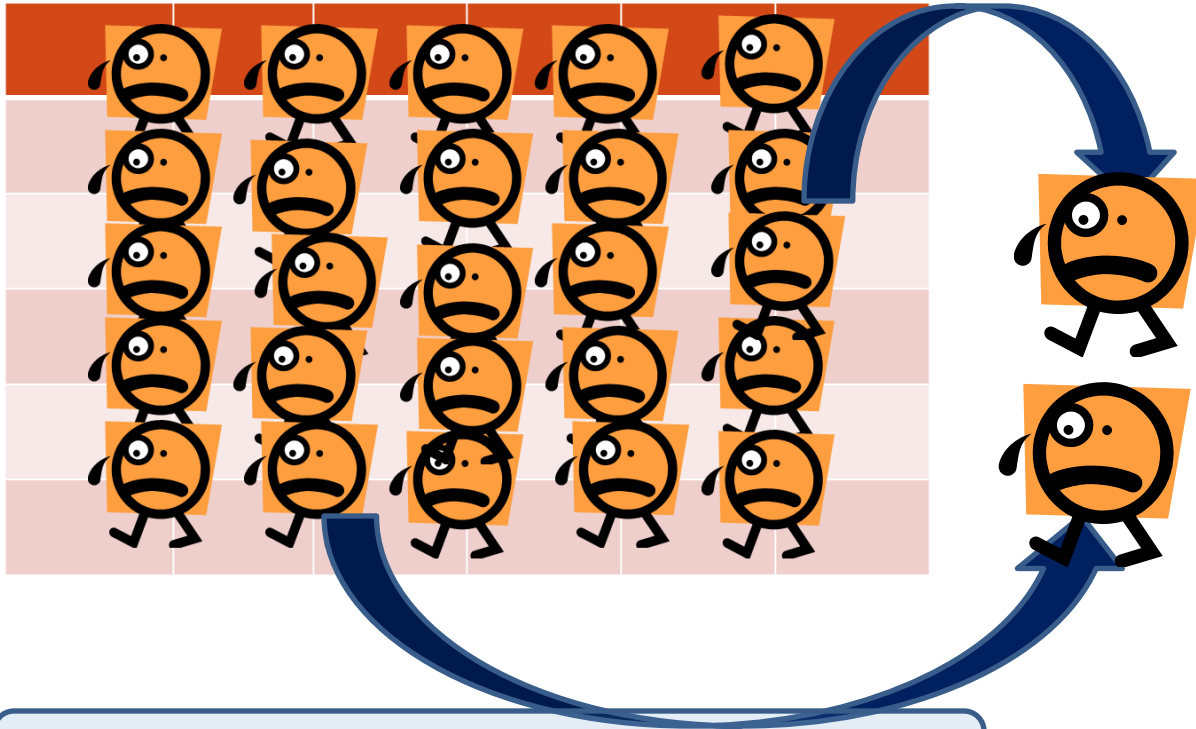
Situation (Traditional Evolutionary Game Theory)



Another players look at the game.

Situation (Traditional Evolutionary Game Theory)

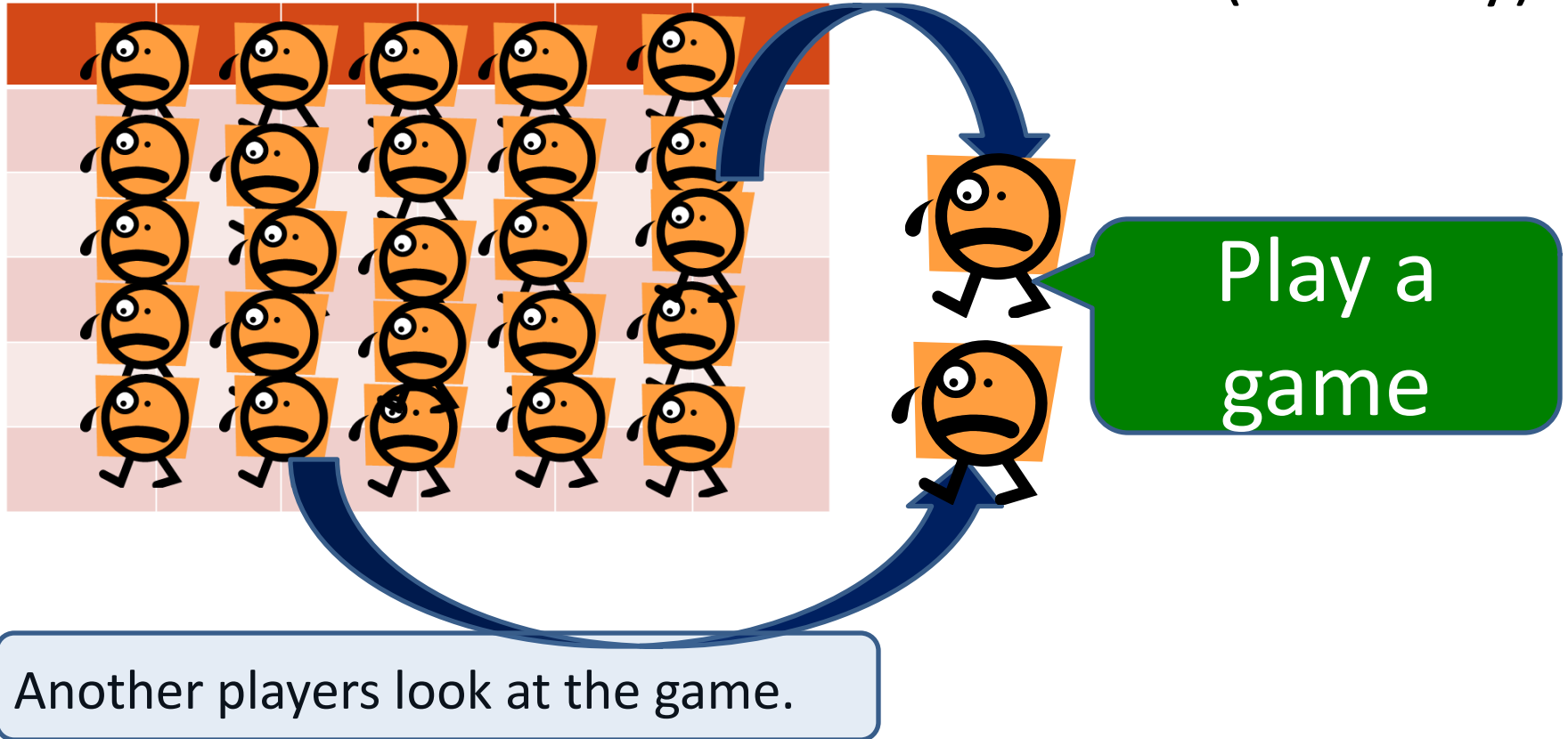
At Random (infinitely)



Another players look at the game.

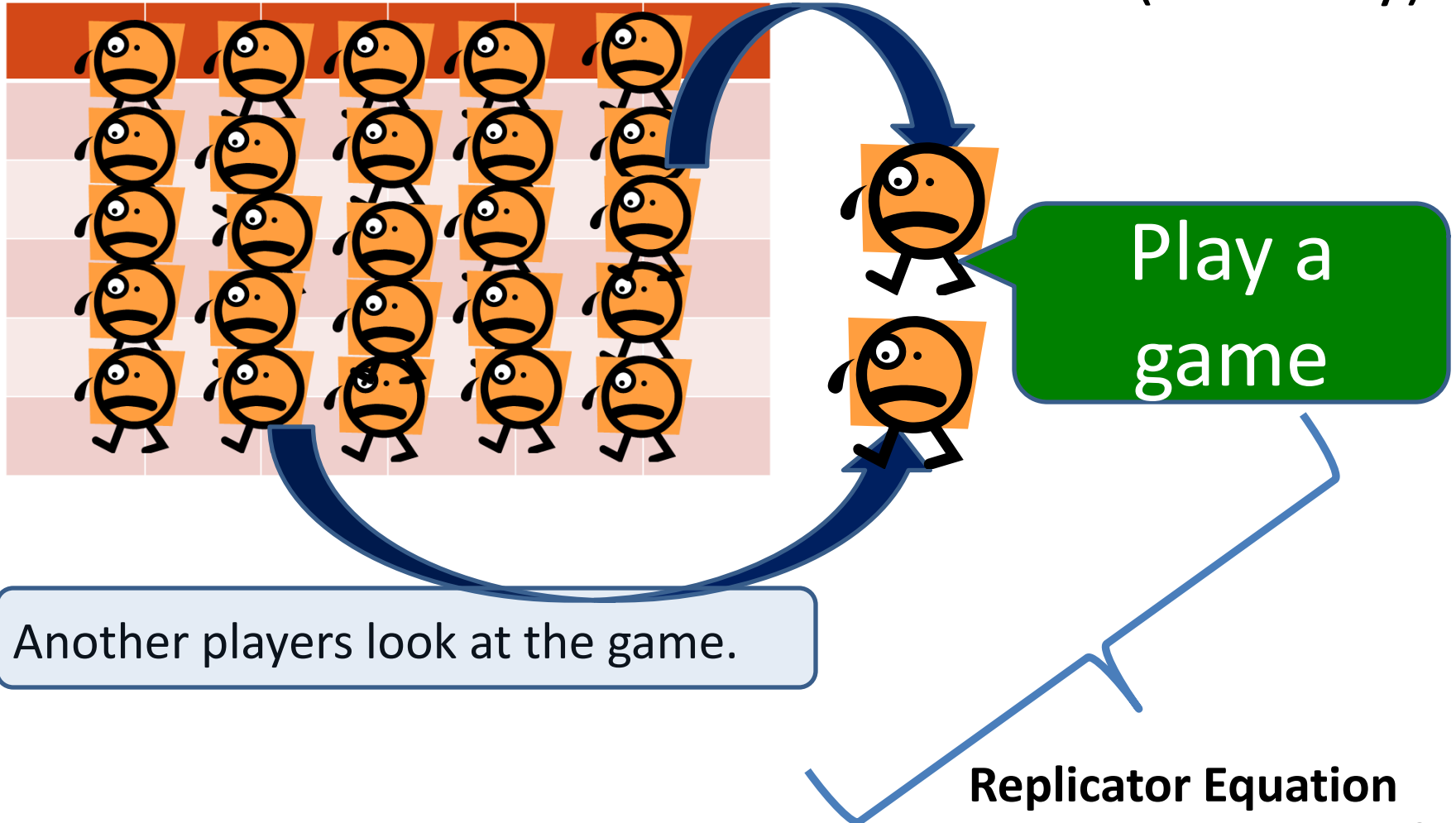
Situation (Traditional Evolutionary Game Theory)

At Random (infinitely)



Situation (Traditional Evolutionary Game Theory)

At Random (infinitely)



REVIEW: Replicator Equation

REPLICATOR EQ.

$$\dot{x}_i = x_i \left(\left(Ax \right)_i - x \cdot Ax \right), i = 1, \dots, n.$$

If the player's payoff from the outcome i is greater than the expected utility $x \cdot Ax$, the probability of the action i is higher than before.

REVIEW: Replicator Equation

REPLICATOR EQ.

$$\dot{x}_i = x_i \left((Ax)_i - x \cdot Ax \right), i = 1, \dots, n.$$

If the player's payoff from the outcome i is greater than the expected utility $x \cdot Ax$, the probability of the action i is higher than before. And this equation shows that the probability of the action i chosen by another players is also higher than before (**externality**).

REVIEW: Replicator Equation

REPLICATOR EQ.

$$\dot{x}_i = x_i \left((Ax)_i - x \cdot Ax \right), i = 1, \dots, n.$$

If the player's payoff from the outcome i is greater than the expected utility $x \cdot Ax$, the probability of the action i is higher than before. And this equation shows that the probability of the action i chosen by another players is also higher than before (**externality**). Furthermore, the equation is derived uniquely by the **monotonic** (that is if one type has increased its share in the population then all types with higher profit should also have increased their shares).

REVIEW: Replicator Equation

REPLICATOR EQ.

$$\dot{x}_i = x_i \left((Ax)_i - x \cdot Ax \right), i = 1, \dots, n.$$

If the player's payoff from the outcome i is greater than the expected utility $x \cdot Ax$, the probability of the action i is higher than before. And this equation shows that the probability of the action i chosen by another players is also higher than before (**externality**). Furthermore, the equation is derived uniquely by the **monotonic** (that is if one type has increased its share in the population then all types with higher profit should also have increased their shares).

Two Strategies

$$\dot{x} = x(1-x)\{b - (a+b)x\} \dots (*)$$

Classification:

(I) Non-dilemma: $a > 0, b < 0$, ESS : one

(II) Prisoner's dilemma : $a < 0, b > 0$, ESS : one

(III) **Coordination** : $a > 0, b > 0$, ESS two

(IV) **Hawk-Dove** : $a < 0, b < 0$, ESS one (mixed strategy)

		2	
		S 1	S 2
1	S 1	a,a	0,0
	S 2	0,0	b,b

Payoff Matrix

EVOLUTIONARY STABLE STRATEGY (ESS)

DEF.: Weibull(1995): $x \in \Delta$ is an ***evolutionary stable strategy (ESS)*** if for every strategy $y \neq x$ there exists some $\bar{\varepsilon}_y \in (0,1)$ such that the following inequality holds for all $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}_y)$.

$$u[x, \varepsilon y + (1 - \varepsilon)x] > u[y, \varepsilon y + (1 - \varepsilon)x].$$

EVOLUTIONARY STABLE STRATEGY (ESS)

DEF.: Weibull(1995): $x \in \Delta$ is an **evolutionary stable strategy (ESS)** if for every strategy $y \neq x$ there exists some $\bar{\varepsilon}_y \in (0,1)$ such that the following inequality holds for all $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}_y)$.

$$u[x, \varepsilon y + (1 - \varepsilon)x] > u[y, \varepsilon y + (1 - \varepsilon)x].$$

INTERPRETATION: incumbent payoff (fitness) is higher than that of the post-entry strategy

(ESS : ① the solution of the Replicator equation + ② asymptotic stable.)

PROPOSITION

PRO.(Bishop and Cannings (1978)): $x \in \Delta$ is evolutionary stable strategy if and only if it meets these first-order and second-order best-reply :

PROPOSITION

PRO.(Bishop and Cannings (1978)): $x \in \Delta$ is evolutionary stable strategy if and only if it meets these first-order and second-order best-reply :

$$(2.4) \quad u(y, x) \leq u(x, x), \quad \forall y, \quad \leftarrow \text{Nash Eq.}$$

$$(2.5) \quad \begin{aligned} &u(y, x) = u(x, x) \\ &\Rightarrow u(y, y) < u(x, y), \end{aligned} \quad \forall y \neq x,$$

PROPOSITION

PRO.(Bishop and Cannings (1978)): $x \in \Delta$ is evolutionary stable strategy if and only if it meets these first-order and second-order best-reply :

$$(2.4) \quad u(y, x) \leq u(x, x), \quad \forall y, \quad \leftarrow \text{Nash Eq.}$$

$$(2.5) \quad \begin{aligned} &u(y, x) = u(x, x) \\ &\Rightarrow u(y, y) < u(x, y), \end{aligned} \quad \forall y \neq x,$$

Asymptotic Stable
Conditon

Acknowledgements

この報告内容は「第5回数学総合若手研究集会」(北海道大学理学部数学教室),「一橋ゲーム理論ワークショップ 2009」において報告したものを, 加筆・訂正したものである.

筆者はこれらの研究会で報告、参加することによって, 多くのコメントや刺激を受けたことに感謝いたします.

2009年3 月 吉川 満。

<http://kikkawa.cyber-ninja.jp/index.htm>