

\* 吉川満

\* 関西学院大学大学院経済学研究科経済学専攻

\* Mitsuru KIKKAWA

\* Department of Economics, Graduate School of Economics,  
Kwansei Gakuin University, Nishinomiya 662-8501 JAPAN  
mitsurukikkawa@hotmail.co.jp

進化ゲーム理論を統計力学を用いて定式化を行った。具体的には最近接の人とのみ、ランダムにマッチングする状況を統計力学で最も単純な Ising モデル, SK モデルを参考に定式化した。そこで均衡という概念は相転移を利用して生成するとした。その結果あるパラメーターの大きさによって、伝統的な進化ゲーム理論と一致する場合としない場合があることが分かった。また無限人のゲームでは均衡はないことが分かった。

また Master 方程式を用いて、動学のモデルにした。そこで Replicator 方程式に対応する、秩序変数が変化する方程式を導出した。さらには外部性 (周辺のゲームに影響) を考慮したものを導出し、Quenched 系において多重均衡が生じていることを示した。

## 1 はじめに

考察する対象において、各個人がどのような人とどのような戦略を使って、ゲームを行い、いくら効用・適応度を得ているのかという、Micro な関係ことが分からないが、Macro 全体として考えるとある程度分かる。そのような対象において、1 つずつのゲームを見れば、ゲーム理論の枠組みで議論できるが、これが何千、何万との数ともなると記述することは到底できない。そこでこの解析の困難を分布関数を導入することによって、高次元系を分析する。この方法は一般的に統計力学 (statistical mechanics) と言われている。

特に本稿では進化ゲーム理論に統計力学を導入する。進化ゲーム理論は現在主に戦略の頻度の動学を表す、Replicator 方程式を使うものとそれを用いず、遷移確率とノイズに着目した確率進化ゲーム (Stochastic Evolutionary Game) の 2 つがある。そこで本研究では統計力学を用いて、新たな進化ゲーム理論を提案する。

このように統計力学を用いて、進化ゲーム理論を分析した直接的な先行研究は Diederich and Opper [2], Tokita and Yasutomi [15] などがある。これらは物理学の分野で研究されている「乱れた系 = スピングラス (spin glass)」の研究を基礎として進化ゲーム理論に応用させている。ここでは進化ゲーム理論の基本的な事柄が明確ではなく、そのまま応用させたように感じるので、本稿では基本的な概念から進化ゲーム理論を構築した。

また本稿と同様に格子 (lattice) モデルを用いて、個体群動態 (Population Dynamics) の文脈で統計力学を用いている、つまり出産と死亡があることを仮定しているもの研究がある。例えば Matsuda, *et al.* [10], Harada and Iwasa [6] である。またそれをゲーム理論で研究した Nakamaru, *et al.* [12] では利得によって死亡率 (・市場退出率) が決まり、仮に死亡 (・市場を退出) すると、ランダムに周りの主体のコピーが抜けた穴に入るというルールを入れたものである。一方で空間構造に着目した進化ゲーム理論に Nowak and May [13] では囚人のジレンマゲームにおいて最近接の主体とゲームをし、ある戦略が占めているとき戦略が突然変異的に変更するとし、そこで得点・利得が高いものが低いものにとって代わるというルールを導入し、その戦略の分布の遷移をシミュレーションによって明らかにしたものもある。これらの空間構造を有する (進化) ゲーム理論のサーベイとして、Szabó and Fáthb [14] がある。以上の代表的な先行研究は生物学の事例に触発され研究されているものやシミュレーションを用いたアプローチのために一般的な性質・構造が分かりにくい。

そこで本稿は一般的な進化ゲーム理論に統計力学を導入することを行った。ただし先行研究にあるよう

<sup>1)</sup>本稿は 2007 年 9 月 1 日関西学院大学大学院経済学研究科研究会主催の夏季研究会にて報告した内容を大幅に加筆・訂正したものである。

に出産と死亡 (参入・退出) は考慮していない。より具体的には統計力学で最も単純な Ising モデル, それを拡張した SK(Sherrington-Kirkpatrick) モデル [11], を用いて, 高次元の進化ゲーム理論の構築を行った。

本稿は次のように構成されている。第 2 節で, 最近接格子とゲームを行うモデルを定式化する。第 3 節で, ランダムにマッチングし, ゲームを行うモデルを Annealed 系と Quenched 系で定式化し, 秩序変数を求める。第 4 節で, Master 方程式を用いて, 動学のモデルにした。第 5 節で, 結論を述べる。

## 2 最近接相互作用 (Ising モデル)

### 2.1 $2 \times 2$ 対称 2 人ゲーム

本節では統計力学で最も単純なモデルである, 格子モデルを進化ゲーム理論に導入する。よってここでは有限であるが, かなり多数の主体がいて<sup>2)</sup>, 2 タイプの主体が 1 対 1 で出会い, 戦略を 2 つを持ち, ゲームを行うとする。

そこで本研究ではこの格子上の各要素を主体と見て, その主体が戦略を 2 つ持って, 1 つ変数を入れ, どのようなときに戦略があるに揃ったり, またはランダムに分布するのかということを考える。

具体的には 1 から  $N$  までの整数の集合  $V = \{1, 2, \dots, N\} \equiv \{i\}_{i, \dots, N}$  を格子, その要素  $i$  をサイト (site) あるいは格子点と呼ぶことにする。サイト 2 個の組を適当に集めた集合  $B = \{(ij)\}$  を作り, その各要素  $(ij)$  (ボンドあるいは結合) は隣同士の組 (最近接 (nearest neighbor) 格子点对) でゲームを行う。そこでの結果利得・適応度 (fitness) が対応していく。伝統的な進化ゲーム理論では一列に並んで以前の行っているゲームを見て, 自分の戦略を決定するが, このモデルでは同時 (one-shot) にゲームを行う。よって動学理論ではなく, 静学理論である。

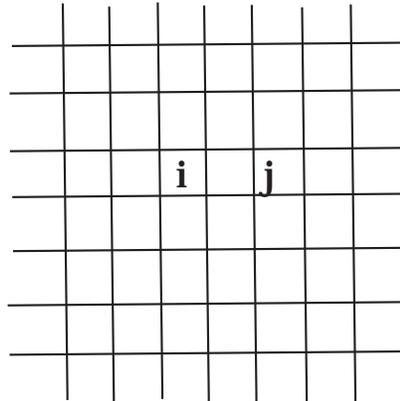


図 1: 2次元正方格子と最近接格子点の例。要素  $(i, j)$  は主体を表している。

**EXAMPLE 2.1** 主体が 1, 2 がある戦略的な相互作用がある状況にあるとする。特に戦略が 2 つ場合の対称 2 人ゲームを考える。このときの各主体の戦略は  $S_i = \{1, 2\}, S_j = \{1, 2\}$  である。また主体 1 の利得は  $f_{11} = a, f_{22} = b, f_{ij}(i \neq j) = 0$  とする。この状況をまとめると次のような利得表となる。

<sup>2)</sup>この分野の人口については有限, 無限, あるいは有限だけれどもかなり大きい数など様々ことが言われている。この問題を研究している論文もある。例えば Judd [9], Boylan [1] など存在する。無限であると数学的に高度となり, 既存の多くは研究はすべて数学的には不正確となってしまう。しかし有限であると, 大数の法則が成り立たず, Random Matching とはならず, これもモデリングする際困難が生じる。結果に重大な影響を与えないので, 折衷案として有限だけれどもかなり大きい数というのがこの分野での暗黙のルールとなっている。統計力学の要素の数は有限だけれどもかなり大きい数から無限までの数であるの範囲内である。

1 \ 2	戦略 1	戦略 2
戦略 1	$a, a$	$0, 0$
戦略 2	$0, 0$	$b, b$

Payoff Matrix 1.

**EXAMPLE 2.2** 統計力学で最も単純なモデルである, Ising モデル EXAMPLE 2.2 と同様に記すと, その各要素が  $+1, -1$  を持っている. ただしこのときのハミルトニアン (エネルギー, 利得) は,  $a, b > 0$  である.

1 \ 2	戦略 1(-1)	戦略 2(+1)
戦略 1(-1)	$a, a$	$0, 0$
戦略 2(+1)	$0, 0$	$b, b$

Payoff Matrix 2.

**ASSUMPTION 2.3** 各主体は高い利得・適応度を得ることを望んでいる.

**PROPOSITION 2.4** ASSUMPTION 2.3 のもとでの主体  $x$  のある戦略  $\{S_i\}, i = 1, \dots, N$  を取り, ある利得  $f$  を得るというゲームの状況下に戦略  $\{S_i\}$  の確率分布は

$$(2.1) \quad P(\{S_i\}) = Z^{-1} \exp(\gamma f)$$

となる. ただし  $\{S_i\}$  は主体  $i$  の戦略,  $\gamma$  は変数<sup>3)</sup>,  $f$  はある戦略  $\{S_i\}$  を取ったときの利得・適用度,  $Z$  は規格化定数を表している. よって  $\sum_{i=1}^N P(\{S_i\}) = 1$  となる. また  $Z = \text{Tr} \exp(\gamma f)$ , ( $\text{Tr}$  をすべての要素配列についての和) と書くことも多い.

証明: 略<sup>4)</sup>.

よってこの PROPOSITION 2.4 から, 利得  $f$  が大きければ, その戦略をとる確率が高くなることを表している<sup>5)</sup>. またこの (2.1) 式を, Gibbs-Boltzmann 分布 (Gibbs-Boltzmann distribution),  $\exp(\gamma f)$  を Boltzmann 因子 (Boltzmann factor) という.

**DEFINITION 2.5** 戦略が一定の秩序を持っているかどうかを判断する量を秩序パラメータ (order parameter) という概念を次のように導入する.

$$(2.2) \quad m = \langle S_i \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i \equiv \left( \sum_i S_i P(\{S_i\}) \right).$$

ただし  $\langle \rangle$  は平均を表している.

**EXAMPLE 2.6** EXAMPLE 2.1 を例に取る. このとき  $\{S_i\} = 1, 2, N = 2$  であるので, 各戦略を取ったときの秩序パラメータは,

$$\begin{aligned} \text{戦略 1 を確率 1 でとる場合, } m &= \frac{1}{2}, \\ \text{戦略 2 を確率 1 でとる場合, } m &= 1, \end{aligned}$$

<sup>3)</sup>  $\gamma$  は変数であるが, このモデルではゲームを一齐に行い, 他者がどのような戦略を用いているのかわからない. そこでこの変数  $\gamma$  が他者の行動を知らせる, 例えば正の情報量などを表している. そのため変数  $\gamma$  が最大のとき, 既存の進化ゲーム理論と同様になる.

<sup>4)</sup> 導出の仕方は様々であるが, 等重率を仮定するとこの形となる. 詳細は統計力学の教科書を参照のこと.

<sup>5)</sup> 進化ゲーム理論で一般に使われている Replicator 方程式は  $\dot{x}_i = x_i((Ax)_i - x \cdot Ax), i = 1, \dots, n, A:$  利得行列. である. この方程式はある戦略  $i$  を取ったときの自分の利得が平均利得よりも大きい場合には, その戦略を取る確率が高くなり, またゲームをしている周りの主体がその戦略を取る確率が高いほどその増加率も高くなる (外部性の存在), ということを示している. PROPOSITION 2.4 はこの概念に対応しているが, 外部性は存在しない. しかし第 4 節で外部性が存在するものを取り扱う.

戦略1と戦略2をランダムにとる場合,  $m = \frac{3}{4}$ .  
 と計算できる. これから  $m$  の値は  $\frac{1}{2} \leq m \leq 1$  の間で,  $m = \frac{1}{2}$  に近ければ, 戦略1を取る人が多いと分かる.  
 $m = 1$  に近ければ, 戦略2を取る人が多い. ランダムで戦略を取る場合は,  $\frac{3}{4}$  であると分かる.  
 また EXAMPLE 2.2 の Ising モデルでは,  $S_i = \{-1, 1\}$  としているので,  $m = 1, 0$ (ランダム),  $-1$  となる.  
 $\gamma$  が大きければ, 利得の大小関わらず  $S_i = \{-1, 1\}$  のどちらか均衡へ収束する.  $\gamma$  が小さければ, 均衡へ収束せず, ランダムとなる. これをまとめると次のような図となる. 利得によっては収束するが, そうではない場合, 収束しない場合もある.

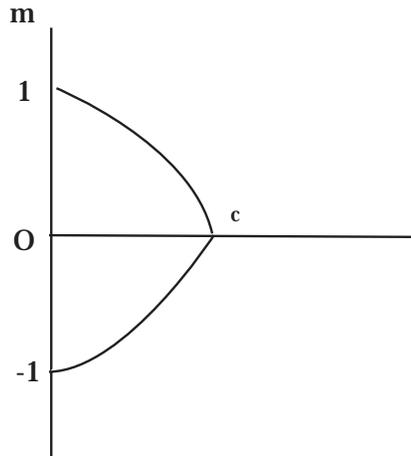


図 2: 例: Ising モデルにおける変数  $\gamma$  と秩序変数  $m$  との関係.

よって EXAMPLE 2.6 より, 秩序パラメータ  $m$  の値自身は関係なく,  $m$  の値からどちらの戦略の方が多く採用している, ランダムに取っているなど戦略の分布を示していることが分かる.

**DEFINITION 2.7** (Weibull [18])  $x \in \Delta$  が進化的に安定な戦略 (Evolutionary Stable Strategy: ESS) であるとは, どのような戦略  $y \neq x$  に対しても, ある  $\bar{\epsilon}_y \in (0, 1)$  が存在し, すべての  $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon}_y)$  について次の不等式が成り立つことをいう.

$$(2.3) \quad u[x, \epsilon y + (1 - \epsilon)x] > u[y, \epsilon y + (1 - \epsilon)x].$$

**PROPOSITION 2.8** DEFINITION 2.7 で定義した進化的に安定な戦略は以下の条件と同値である.

$$(2.4) \quad u(y, x) \leq u(x, x), \quad \forall y,$$

$$(2.5) \quad u(y, x) = u(x, x) \Rightarrow u(y, y) < u(x, y), \quad \forall y \neq x.$$

証明: 略. (Weibull [18] などに記されている.)

次に秩序パラメータ  $m$  を用いて, 進化的に安定な戦略の特徴づけを行う.

**PROPOSITION 2.9** 統計力学を用いた進化ゲーム理論における進化的に安定な戦略とは次の条件を満たす.

$$(2.4) \quad u(y, x) \leq u(x, x), \quad \forall y, \quad (\text{Equilibrium Condition})$$

$$(2.6) \quad |m - m^*| < \epsilon. \quad (\text{Stability Condition})$$

ただし  $m^*$  は変数  $\gamma$  が最大時の  $m$  の値を示している.

証明: 略.

PROPOSITION 2.8 では, Nash 均衡の条件に, 安定性の条件 (漸近安定) を付け加えることによって, 進化的に安定な戦略と同値であることを言っているが, PROPOSITION 2.9 のように秩序パラメータを使い, それを Lyapunov 安定性の条件に代えることができるということを言っている. PROPOSITION 2.8 では静学はもとより, 動学の場合をも含んでいる. しかし PROPOSITION 2.9 は静学の場合のみを考えているので, Lyapunov 安定性の条件に代えることができる.

## 2.2 $2 \times 2$ 非対称 2 人ゲーム

今まではゲームを行う相手は利得構造が等しかったが, ここではゲームを行う相手の利得構造が等しくない場合を考える. よって格子の要素の隣り合う相手は異なった種類のものがあると考え. そのため対称 2 人ゲームでは 1 つの秩序パラメータだけを考えればよかったが, この非対称 2 人ゲームでは分布が 2 つあるので, 秩序パラメータを 2 つ考える必要がある. そこで例えば秩序パラメータを

$$(2.7) \quad m'_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i \equiv \frac{1}{N} \left( \sum_i S_i P(\{S_i\}) \right).$$

$$(2.8) \quad m'_2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N S_j \equiv \frac{1}{N} \left( \sum_j S_j P(\{S_j\}) \right).$$

とする. その結果進化的に安定な戦略は PROPOSITION 2.8 の (2.5) の条件を以下のようにすれば修正すれば足りる.

$$(2.9) \quad |m'_1 - m_1^*| < \varepsilon_1, |m'_2 - m_2^*| < \varepsilon_2$$

ただし  $m_1^*, m_2^*$  は変数  $\gamma$  が最大時の  $m$  の値を示し,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$  で小さい数とする.

以上により統計力学を用いて, 進化ゲーム理論で最も単純な対称 2 人ゲーム, 非対称 2 人ゲームを定式化した.

## 3 ランダムな相互作用 (Sherrington-Kirkpatrick モデル)

前節の Ising モデルを基礎としたものでは, 戦略の数が 2 つであり, 最近接な相互作用がある場合を考えてきたが, 本節では戦略の数が 2 個あり, ランダムな相互作用をしているモデルを考える. よって様々な主体があり, 戦略を 2 つ持ち, ランダムマッチングをし, 1 対 1 でゲームをする場合を考える. またこのような不均一な系はスピングラスの理論 (spin glass) と呼ばれている. 特にここで取り上げるモデルは Sherrington-Kirkpatrick (SK) Model [11] を取り上げる.

ここで利得・適応度は,

$$(3.1) \quad H(\{J_{ij}\}) = \sum_{i \neq j} J_{ij} S_i S_j$$

$$(3.2) \quad \text{where } P(J_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi J^2}} \exp \left\{ -\frac{(J_{ij} - J_0)^2}{2J^2} \right\}$$

各主体は  $i, j \in B$  であり,  $J_{ij}$  は確率分布  $P(J_{ij})$  に従ってランダムに分布しており, 平均が  $J_0$  で, 分散が  $J^2$  の Gauss 分布を表している.

### 3.1 Annealed 系

この節でも ASSUMPTION 2.3 を満たしていると仮定する. 各主体間の相互作用の分布が主体の行動パターンと絡んでおり, 利得の高い方に変化する (PROPOSITION 2.4). これを一般に Annealed 系と呼ばれている. これに対して当初から主体間の相互作用の強さが決まっている系を Quenched 系という.

自由エネルギーの配位平均を求めるために, 自由エネルギー, 分布関数の配位平均は次のようになる.

$$(3.3) \quad F = \gamma \log \langle Z \rangle,$$

$$\langle Z \rangle = \sum_{\{S_i\}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{(ij)} dJ_{ij} P\{J_{ij}\} \exp(\gamma H\{J_{ij}\}),$$

$$(3.4) \quad = \sum_{\{S_i\}} \exp \left[ \sum_{(ij)} \left\{ \gamma J_0 S_i S_j + \frac{(\gamma J)^2}{2} (S_i S_j)^2 \right\} \right]$$

となる。この式から分かるように、相互作用の強さは格子点  $i, j$  によらない。したがってこの系は長距離相互作用をもつ系である。そこで指数の肩を  $A_N$  とおくと

$$A_N \equiv \sum_{i \neq j} \left\{ \gamma J_0 S_i S_j + \frac{1}{2} (\gamma J)^2 (S_i S_j)^2 \right\}$$

$$(3.5) \quad \sum_{i \neq j} S_i S_j = \left( \sum_i S_i \right)^2 - N \sum_i S_i^2, \quad \sum_{i \neq j} (S_i S_j)^2 = \left( \sum_i S_i^2 \right)^2 - N \sum_i S_i^4.$$

(3.5) を用いると、 $A_N$  は次のようになる。

$$(3.6) \quad A_N = \gamma J_0 \left( \sum_i S_i \right)^2 - \gamma J_0 N \sum_i S_i^2 + \frac{1}{2} (\gamma J)^2 \left( \sum_i S_i \right)^4 - \frac{1}{2} (\gamma J)^2 N \sum_i S_i^4$$

となる。したがって式 (3.3) より

$$F = \gamma \log \left[ \sum_{\{S_i\}} \exp \left\{ \gamma J_0 \left( \sum_i S_i \right)^2 - \gamma J_0 N \sum_i S_i^2 + \frac{1}{2} (\gamma J)^2 \left( \sum_i S_i \right)^4 - \frac{1}{2} (\gamma J)^2 N \sum_i S_i^4 \right\} \right]$$

$$(3.7) \quad = \gamma \left[ \sum_{\{S_i\}} \left\{ \gamma J_0 \left( \sum_i S_i \right)^2 + \frac{1}{2} (\gamma J)^2 \left( \sum_i S_i \right)^4 - \gamma J_0 N \sum_i S_i^2 - \frac{1}{2} (\gamma J)^2 N \sum_i S_i^4 \right\} \right]$$

を得る。そこで秩序パラメータ  $m = \langle S_i \rangle$  と置くと、 $\sum_i S_i = mN$  となる。すると、

$$\frac{\partial F}{\partial m} = 2\gamma^2 J_0 N^2 m + 2\gamma^3 J^2 N^4 m^3 = 0$$

$$(3.8) \quad m = 0 \text{ or } \pm \sqrt{\frac{-J_0}{\gamma J^2 N^2}}$$

特に  $N \rightarrow \infty$  とすると、 $m = 0$  となる。

よって  $m \neq 0$  となる  $m^*$  があることから、高次元系でも戦略に何らかの秩序が存在することが分かった。つまり均衡の存在を明示しており、後の議論は 2 節と同様の結論が得られる。また同様に非対称 2 人ゲームに拡張する場合も同様である。ただし無限人のゲームでは均衡はしないということが分かった。

## 3.2 Quenched 系

前節までが Annealed 系であった。ここでは Quenched 系を分析する。よってこのモデルでは当初から相互作用とその強さが決まっている<sup>6)</sup>。特に先行研究 [2, 15] ではこの Quenched 系を分析している。

(3.1),(3.2) の下で Quenched 系での自由エネルギー (3.3) は次のような (3.9) となる。

$$(3.9) \quad F = \gamma \langle \log Z \rangle,$$

これは解析的には実行が困難なので、次のような Replica 法、 $n$  個の全く同じ系からなる Annealed 系への変換を用いる。

$$(3.10) \quad \langle \log Z \rangle = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} (\langle Z^n \rangle - 1).$$

$$\langle Z^n \rangle = \sum_{\{S_i\}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{(ij)} dJ_{ij} P\{J_{ij}\} \exp(\gamma \sum_{i \neq j} (S_i^\alpha S_j^\alpha)^2),$$

$$(3.11) \quad = \sum_{\{S_i^{(\alpha)}\}} \exp \left[ \sum_{(i \neq j)} \left\{ \gamma J_0 S_i^{(\alpha)} S_j^{(\alpha)} + \frac{(\gamma J)^2}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} S_i^{(\alpha)} S_j^{(\alpha)} S_i^{(\beta)} S_j^{(\beta)} \right\} \right].$$

そこで指数の肩を 次のように  $A_N$  とおくと、

<sup>6)</sup> ゲーム理論の文脈から考えると、この仮定は不自然であると感じられるが、生物学における食物連鎖などを想定すると、ある動物 A はある動物 B との相互作用を行うと、遺伝的に決まっているが、動物 C や D とは相互作用は行わない。よってこのようなことを想定しているシステムにおいては妥当である。

$$A_N \equiv \sum_{(i \neq j)} \left\{ \frac{1}{2} \gamma J_0 S_i^{(\alpha)} S_j^{(\alpha)} + \frac{(\gamma J)^2}{4} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} S_i^{(\alpha)} S_j^{(\alpha)} S_i^{(\beta)} S_j^{(\beta)} \right\}.$$

(3.10) を用いると,

$$(3.12) \quad A_N = \frac{1}{2} \gamma J_0 \sum_{\alpha} \left( \sum_{i \neq j} S_i^{(\alpha)} \right)^2 - \frac{1}{2} \gamma J_0 n N + \frac{(\gamma J)^2}{4} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left( \sum_{i \neq j} S_i^{(\alpha)} S_j^{(\beta)} \right)^2 - \frac{1}{4} (\gamma J)^2 n^2 N.$$

ここで Hubbard-Stranovich 変換 [8]

$$(3.13) \quad \exp \left[ \frac{a^2}{2} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ ax - \frac{x^2}{2} \right] dx$$

を用いる. すなわち

$$\begin{aligned} \exp \left[ \frac{(\gamma J)^2}{2} \left( \sum_{i \neq j} S_i^{(\alpha)} S_j^{(\beta)} \right)^2 \right] &= \sqrt{\frac{N}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( -\frac{N}{2} y_{\alpha\beta}^2 + \gamma \tilde{J} \sum_{i \neq j} S_i^{(\alpha)} S_j^{(\beta)} y_{\alpha\beta} \right) dy_{\alpha\beta}, \\ \exp \left[ \frac{\gamma J_0}{2} \left( \sum_{i \neq j} S_i^{(\alpha)} \right)^2 \right] &= \sqrt{\frac{N}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( -\frac{N}{2} x_{\alpha}^2 + \sqrt{\gamma \tilde{J}} \sum_{i \neq j} S_i^{(\alpha)} x_{\alpha} \right) dx_{\alpha}, \end{aligned}$$

ただし  $\tilde{J} = NJ, \tilde{J}_0 = NJ_0$  である.

さらにここで  $Y(\{y_{\alpha\beta}, x_{\alpha}\})$  を

$$Y(\{y_{\alpha\beta}, x_{\alpha}\}) = \sum_{\alpha, \beta} \exp \left[ \gamma \tilde{J} \sum_{i \neq j} S_i^{(\alpha)} S_j^{(\beta)} y_{\alpha\beta} + \sqrt{\gamma \tilde{J}_0} \sum_{i \neq j} S_i^{(\alpha)} x_{\alpha} \right],$$

とおく. すると,

$$\sum_{\alpha, \beta} \prod_i \exp \left[ \gamma \tilde{J} \sum_{i \neq j} S_i^{(\alpha)} S_j^{(\beta)} y_{\alpha\beta} + \sqrt{\gamma \tilde{J}_0} \sum_{i \neq j} S_i^{(\alpha)} x_{\alpha} \right] = \exp(N \log Y(\{y_{\alpha\beta}, \{x_{\alpha}\}\}),$$

とおける. ここで  $\{z_{\nu}\} = \{y_{\alpha\beta}, x_{\alpha}\}$  と表す.

$$(3.14) \quad g\{z_{\nu}\} = \frac{1}{2} \sum_{(\alpha\beta)} y_{\alpha\beta}^2 + \frac{1}{2} \sum_{(\alpha)} x_{\alpha}^2 - \log Y(\{y_{\alpha}, \{x_{\alpha}\}\})$$

この方程式の偏微分,

$$\frac{\partial g\{z_{\nu}\}}{\partial z_{\nu}} = 0$$

の解を  $\{z_{\nu}^{(0)}\}$  として  $g\{z_{\nu}\}$  を  $g\{z_{\nu}^{(0)}\}$  のまわりで展開すると,

$$g\{z_{\nu}\} = g\{z_{\nu}^{(0)}\} + \frac{1}{2} \sum_{\mu_1, \mu_2} \frac{\partial^2 g\{z_{\nu}^{(0)}\}}{\partial z_{\mu_1} \partial z_{\mu_2}} (z_{\mu_1} - z_{\mu_1}^{(0)}) (z_{\mu_2} - z_{\mu_2}^{(0)}) + O(z_{\nu} - z_{\nu}^{(0)})^3,$$

となる. ここで鞍点法 (saddle-point method) を用いると,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\nu} \left( \frac{N}{2\pi} dz_{\nu} \right) \exp(-Ng\{z_{\nu}\}) = \exp(-Ng\{z_{\nu}^{(0)}\}) (\det \Lambda_n)^{-\frac{1}{2}} (1 + O(N^{-1}))$$

と求める. ここで  $\Lambda_n$  は  $\frac{n(n+1)}{2} \times \frac{n(n+1)}{2}$  の行列であり,

$$\Lambda_n = \left( \left[ \frac{\partial^2 g\{z_{\nu}^{(0)}\}}{\partial z_{\mu_1} \partial z_{\mu_2}} \right] \right)$$

である.

以下では, すべての  $y_{\alpha\beta}^{(0)}$  は等しく, またすべての  $x_{\alpha}^{(0)}$  は等しいとする (レプリカ対称性の仮定). すなわち

$$y_n \equiv y_{12}^{(0)} = y_{13}^{(0)} = \cdots = y_{n-1, n}^{(0)}, \quad x_n \equiv x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \cdots = x_n^{(0)},$$

とおく. よって  $Y(\{y_{\alpha\beta}, x_{\alpha}\})$  の相互作用がある部分は,

$$2 \sum_{\alpha, \beta} S^{(\alpha)} S^{(\beta)} = \left( \sum_{\alpha=1}^n S^{(\alpha)} \right)^2 - n \sum_{\alpha} (S^{(\alpha)})^2,$$

と変換することになる. よって

$$g\{z_{\nu}^{(0)}\} = \frac{n(n-1)}{4} y_n^2 + \frac{n}{2} x_n^2 - \log \tilde{Y}(y_n, x_n),$$

となる. ただし,

$$\begin{aligned} \tilde{Y}(y_n, x_n) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp \left( -\frac{1}{2} z^2 \right) \sum \exp \left\{ \left( z \sqrt{\gamma \tilde{J}} y_n + \sqrt{\gamma \tilde{J}_0} x_n \right) \sum_{\alpha} S^{(\alpha)} - \frac{\gamma \tilde{J}}{2} n y_n \right\}, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp \left( -\frac{1}{2} z^2 \right) \left\{ 2 \cosh \left( z \sqrt{\gamma \tilde{J}} y_n + \sqrt{\gamma \tilde{J}_0} x_n \right)^n \exp \left( \frac{-\gamma \tilde{J}}{2} n y_n \right) \right\}, \end{aligned}$$

次に,  $y_n = \gamma \tilde{J} q_n, x_n = \sqrt{\gamma \tilde{J}_0} m_n$  と置くと,

$$g\{z_\nu^{(0)}\} = \left(\frac{\gamma\tilde{J}}{2}\right)^2 \{n(n-1)q_n^2 + 2nq_n\} + n\frac{\gamma\tilde{J}_0}{2}m_n^2 - \log \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) \left(2 \cosh \Xi_n(z)\right)^n \right\},$$

ただし,  $\Xi_n(z) = \gamma\tilde{J}\sqrt{q_n}z + \gamma\tilde{J}_0m_n$  である.

以上より, 自由エネルギーは次のようになる.

$$(3.15) \quad F_N = - \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \left[ (\det \Lambda_n)^{-\frac{1}{2}} \exp N \left\{ \left(\frac{\gamma\tilde{J}}{2}\right)^2 n - g\{z_\nu^{(0)}\} \right\} (1 + O(N^{-1})) - 1 \right]$$

鞍部点を決めるために  $g\{z_\nu^{(0)}\}$  を  $q_n$  と  $m_n$  で偏微分すると,

$$m_n = \frac{1}{\Omega} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) (2 \cosh \Xi_n(z))^n \tanh \Xi_n(z)$$

$$1 + (n-1)q_n = \frac{1}{\Omega} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) (2 \cosh \Xi_n(z))^n \tanh \Xi_n(z) \frac{z}{\gamma\tilde{J}\sqrt{q_n}}$$

$$\text{ただし } \Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) (2 \cosh \Xi_n(z))^2$$

いま  $n \rightarrow 0$  で  $q = \lim_{n \rightarrow 0} q_n$  と  $m = \lim_{n \rightarrow 0} m_n$  が存在すると仮定すると,

$$(3.16) \quad m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) \tanh(\gamma\tilde{J}\sqrt{q}z + \gamma\tilde{J}_0n) dz$$

$$(3.17) \quad q = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) \tanh^2(\gamma\tilde{J}\sqrt{q}z + \gamma\tilde{J}_0n) dz$$

となる.

## 4 動学: Master 方程式

今までが静学の分析であった. この節では Master 方程式を用いて動学にする [5]<sup>7)</sup>. 格子点  $(1, 2, \dots, N)$  上の主体の戦略  $(S_1, S_2, \dots, S_N)$  の時刻  $t$  における確率分布を  $P(S_1, S_2, \dots, S_N; t)$  とする. この時間変化は, 次の Master 方程式に従うものとする.

$$(4.1) \quad \frac{d}{dt} P(S_1, \dots, S_N; t) = - \sum_i W_i(S_i) P(S_1, \dots, S_N; t) + \sum_i W_i(-S_i) P(S_1, \dots, -S_i, \dots, S_N; t)$$

ただし  $W_i(S_i)$  は, 戦略が  $S_i$  から  $-S_i$  に遷移する確率を表し,  $S_i$  以外の戦略も含む. 特にランダムに相互作用がある場合は,  $W_i(S_i) = \frac{1}{2}$  となるが, ここでは利得の大小によってその主体の取る確率が変化するので,  $W_i(S_i) \neq \frac{1}{2}$  である.

これから平衡状態での遷移確率  $W_i(S_i)$  を求める. ここでは平衡状態となる十分条件, 一般的には詳細釣り合い条件 (local detail balance condition)

$$(4.2) \quad \frac{W_i(S_i)}{W_i(-S_i)} = \frac{\exp(-\gamma E_i S_i)}{\exp(\gamma E_i S_i)}, \quad \text{where } E_i = \sum_k J_{ij} S_j,$$

を用いる. よってこのモデルでは

$$(4.3) \quad \frac{W_i(S_i)}{W_i(-S_i)} = \frac{1 - S_i \tanh(\gamma E_i)}{1 + S_i \tanh(\gamma E_i)},$$

となる. これを満たす最も簡単な遷移確率  $W_i(S_i)$  は,

$$(4.4) \quad W_i(S_i) = \frac{1}{2\tau} (1 - S_i \tanh(\gamma E_i)),$$

ただし  $\tau$  は相互作用  $J_{ij}$  もないときのたった 1 個の戦略の変化時間を表す.

次に秩序変数 ( $m$ ) に関する時間発展方程式を導く. (4.1) と (4.4) により,

$$(4.5) \quad \tau \frac{d}{dt} \langle m \rangle_t = \langle \tanh \gamma E_i \rangle_t - m_t,$$

$Z$  に従い時間変化する. また戦略の相関関数  $\langle S_i S_j \rangle_t$  は次式を満たす.

$$(4.6) \quad \tau \frac{d}{dt} \langle S_i S_j \rangle_t = -2 \langle S_i S_j \rangle_t + \langle S_i \tanh \gamma E_j \rangle_t \langle S_j \tanh \gamma E_i \rangle_t,$$

特に  $t \rightarrow \infty$  の平衡系では,

$$(4.7) \quad m = \langle \tanh \gamma E_i \rangle, \quad \langle S_i S_j \rangle = \langle S_i \tanh \gamma E_j \rangle.$$

を得る.

<sup>7)</sup> 動学の Ising モデルと Thouless-Anderson-Palmer(TAP) 方程式 [11] との関係について明示的に述べているものは存在しないが, 本稿でも示すように同一の方法である.

よって自身の利得 ( $\langle \tanh \gamma E_i \rangle_t$ ) が秩序変数  $m$  よりも大きい場合には,  $m$  は増加し, 小さい場合には,  $m$  は減少することを示している. またこの方程式は進化ゲーム理論における Replicator 方程式<sup>8)</sup>に対応している.

#### 4.1 Thouless-Anderson-Palmer(TAP) 方程式 [11]: Hermite Matrix

秩序変数が従う方程式に行列の固有値の特性を用いることによって相転移となる値を導出する. 具体的には最大固有値 (Frobenius 根) を求め, そこから Perron-Frobenius の定理<sup>9)</sup> により安定, 不安定の境界を求める.

各主体がランダムにマッチする場合を考える. そのとき各主体が得ることができる利得はランダムに変化する. このことを表すことができるのが, Random 行列である. 要素がランダムに変化することからある一定の法則があることが知られている.  $J_{ij} = J_{ji}$  という仮定を設けても利得における Affine 変換可能であることから, この Random 行列理論は Hermite 行列と変形できる. その結果 Wigner の半円則 (semi-circle law) [16, 17] より最大固有値が求まる<sup>10)</sup>. そこで Perron-Frobenius の定理を適用すればよい. 特に Random 行列が Hermite 行列である場合固有値が実数のみとなる<sup>11)</sup>.

Annealed 系では秩序変数  $m$  は常に一定であった. そこでここではもう一つ変数  $h_i$  (外場からの影響) を導入する. その結果各主体は周りを見ることができ, 周りの影響によっても利得が変化する場合を考える<sup>12)</sup>. その結果利得・適応度は (3.1) と比べ, 次のように変形する.

$$(4.8) \quad H(\{J_{ij}\}) = \sum_{i \neq j} J_{ij} S_i S_j + \sum_j h_j S_j.$$

第 3 節と同様に自由エネルギー  $F$  を計算すると,

$$(4.9) \quad F = \gamma \left[ \sum_{\{S_i\}} \left\{ \gamma J_0 \left( \sum_i S_i \right)^2 + \frac{1}{2} (\gamma J)^2 \left( \sum_i S_i \right)^4 - \gamma J_0 N \sum_i S_i^2 - \frac{1}{2} (\gamma J)^2 N \sum_i S_i^4 - m h_j \right\} \right].$$

これを秩序変数  $m$  による第 1 階条件より,

$$(4.10) \quad h_j = 2\gamma m(1-N)(J_0 + J^2 m^2),$$

を得る. よってこの場合も秩序変数  $m$  が不連続となる点がない. これは Annealed 系を仮定しているため, 主体が自ら利得を高く得るように行動しているから不連続となる点が存在しないと考えることができる.

次に Quenched 系<sup>13)</sup>の秩序変数の変化を調べる. 利得・適応度は (3.1) と比べ, 次のように変形する.

$$H = - \sum_j J_{ij} S_i S_j - \sum_j h_j S_j.$$

ここで平衡点での秩序変数を (4.7) と同様に導出し,  $\langle \cdot \rangle$  を  $\tanh$  の中に移す近似を行うと Weiss 近似の表式

$$m_i = \tanh \left\langle \beta \left( h_i + \sum_j J_{ij} m_j \right) \right\rangle,$$

が得られる.  $J_0 = 0$  の周辺で展開すると,

$$m_i = \beta \sum_j J_{ij} m_j - \beta \sum_j J_{ij}^2 m_j + \beta h_i + \dots$$

$N \times N$  の  $J_{ij}$  行列の固有ベクトルによる展開を行う. 固有ベクトル  $\{|i\rangle\}$  は完全規格直交系とし, 固有値を  $J_\lambda$  とする  $\left( \sum_j J_{ij} \langle i|\lambda \rangle = J_\lambda \langle i|\lambda \rangle \right)$ . また,  $m_\lambda = \sum_i m_i \langle i|\lambda \rangle$ ,  $h_\lambda = \sum_i h_i \langle i|\lambda \rangle$  で, それぞれ  $\lambda$  モード磁化導入すると, 次を得る.

$$m_\lambda = \frac{1}{T - J_\lambda} h_\lambda.$$

最大固有値が  $J_\Lambda$  が  $2J$ , 最小固有値が  $-2J$  その他の固有値はその間に半円則 [16, 17]

<sup>8)</sup>脚注 5) を参照のこと.

<sup>9)</sup>付録を参照のこと.

<sup>10)</sup>非 Hermite 行列の場合は, 固有値は複素数となり, 固有値の分布は円 (Girko の円則 (circle law) [4, 3]) となることを知られている.

<sup>11)</sup>証明は省略する. 線型代数の教科書を参照されたい.

<sup>12)</sup>Replicator 方程式は平均場との相互作用だけではなく, 周りの影響によってもその戦略の増減が決まった.

<sup>13)</sup>Quenched 系では当初に相互作用の相手や強さが決まっているので, 動学にする際にはそれらが変化する. よって Quenched 系ではなくなる. しかしマクロ的に変化する時間の流れに比べ, ミクロ的に変化する時間が十分に小さい場合には Quenched 系であっても動学として記述できるとした.

$$\rho(J_\lambda) = \frac{2}{\pi J_\lambda^2} (Jz_\Lambda - J_\lambda^2)^{1/2},$$

となるので,  $T_C = 2J_\lambda$  である. つまり新たに均衡が生成するパラメーターの値は  $2J_\lambda$  である.

以上から各主体は周りを見ることができ, 周りの影響によっても利得が変化し (外場の存在), Quenched 系の場合に秩序変数  $m$  の非連続な変化, 分岐が起り, 多重解を持つ (図 3).

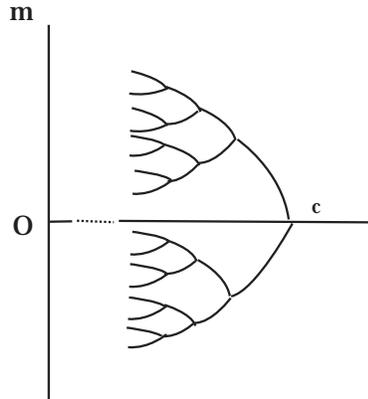


図 3: 秩序変数の分岐と多重解

## 5 結論

以上のように統計力学を用いて進化ゲーム理論を定式化を行った. その結果 Replicator 方程式を使うものや確率進化ゲームとは異なる新しいものとなった. そこでは空間に分布している主体が一斉にゲームを行い, どの程度戦略が一致しているのか, 秩序変数を用いて分かり, 変数によっては通常の進化ゲーム理論と一致し, 変数によっては戦略の分布が全くランダムとなることが分かった. さらに主体が無限いる場合は秩序変数はランダムとなり, 均衡が生成されない.

また Master 方程式を用いて, 動学のモデルにした. そこで Replicator 方程式に対応する, 秩序変数に変化する方程式を導出した. さらには外部性 (周辺のゲームに影響) を考慮したものを導出し, Quenched 系において多重均衡が生じていることを示した.

## 付録

**Perron-Frobenius の定理:**

$A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  を既約な非負行列とするとき, このとき,  $A$  は次の性質をもつ実固有値  $\lambda(A)$  をもつ.

- (i)  $\lambda(A)$  は正で, これに対応する非負の固有ベクトル  $x \geq 0$  が存在する.
- (ii) ある  $x \geq 0$  に対して,  $Ax \geq \mu x$  が成り立つような実数  $\mu$  は, 不等式  $\mu \leq \lambda(A)$  を満たす.

特に,  $A$  の任意の固有値 (一般に複素数) を  $\omega$  とすれば,  $|\omega| \leq \lambda(A)$ . ただし,  $|\omega|$  は複素数  $\omega$  の絶対値である.

- (iii)  $\lambda(A)$  は  $A$  の単調増加関数である. すなわち,  $A_1 \geq A_2 \geq 0$  ならば,  $\lambda(A_1) \geq \lambda(A_2)$ .

(iv)  $\rho$  を実数,  $I$  を  $n$  次単位行列とするとき,  $\rho I - A$  が非負の逆行列  $(\rho I - A)^{-1}$  を持つための必要十分条件は,  $\rho > \lambda(A)$ .

- (v)  $\lambda(A)$  は特性方程式  $\det(\lambda I_n - A) = 0$  の単根である.

**Remark A.1**

$A \in \mathbf{R}^{n \times n} \geq 0$  を既約とすると,  $\lambda(A) = \lambda(A^T)$  が成り立つ.

## 参考文献

- [1] Boylan, Richard T.: "Laws of Large Numbers for Dynamics Systems with Randomly Matched Individuals," *Journal of Economic Theory*, Vol.**57**, Issue 2 (Aug., 1992), pp. 473-504.
- [2] Diederich, S. and Opper, M.: "Replicators with random interactions: A solvable model," *Physical Review A*, Vol.**39**, Number 8 (1989) pp.4333-4336.
- [3] Edelman, Alan.: "The Probability that a Random Real Gaussian Matrix has  $k$  Real Eigenvalues, Related Distributions, and the Circular Law," *Journal of Multivariate Analysis*, **60**(1997), pp.203-232.
- [4] Girko, V.L.: "Circle law Theory," *Theory of Probability and its Applications*, Vol**29**, Issue 4(1985), Pages 694-706.
- [5] Glauber, Roy.J.: "Time-dependent statistics of the Ising model," *Journal of Mathematical Physics*, Vol. **4**(1963), pp. 294-307.
- [6] Harada, Yuko and Iwasa, Yoh.: "Lattice Population Dynamics for Plants with Dispersing Seeds and Vegetative Propagation," *Researches on Population Ecology*, Vol. **36**(1994), No.2, pp.237-249.
- [7] Hofbauer, Joseph and Sigmund, Karl.: *Evolutionary Games and Replicator Dynamics*, Cambridge University Press, 1998. 邦訳: 竹内康博, 佐藤一憲, 宮崎倫子 (訳) 『進化ゲームと微分方程式』現代数学社, 2001 年.
- [8] Hubbard, J. : "Calculation of Partition Functions," *Physical Review Letters*, Vol.**3**, Issue 2 (July 1959), pp.77-78.
- [9] Judd, K.L.: "The Law of Large Numbers with a Continuum of IID Random Variables," *Journal of Economic Theory*, Vol.**35**, Issue, 1 (Feb., 1985), pp. 19-25.
- [10] Matsuda, H., Ogita, N., Sasaki, A., Sato, K.: "Statistical Mechanics of Population -The Lattice Lotka-Volterra Model -," *Progress of Theoretical Physics*, Vol. **88**, No. 6(12,1992), pp. 1035-1049.
- [11] Mezard, Marc, Parisi, Giorgio and Virasoro, Miguel Angel.: *Spin Glass Theory and Beyond*, World Scientific, 1987.
- [12] Nakamaru, M., Matsuda, H. and Iwasa, Y.: "The Evolution of Cooperation in a Lattice-Structured Population," *Journal of Theoretical Biology*, Vol.**184**(1997), pp. 65-81.
- [13] Nowak, Martin A. and May, Robert M.: "Evolutionary games and spatial chaos," *Nature*, Vol.**359**, (29 October), pp. 826-829.
- [14] Szabó, György and Fath, Gábor.: "Evolutionary games on graphs," *Physics Reports*, Vol.**446**(2007), pp.97-216.
- [15] Tokita, Keiichiro and Yasutomi, Ayumu.: "Mass extinction in a dynamical system of evolution with variable dimension," *Physical Review E*, Vol.**60**(1999), pp.842-847.
- [16] Wigner, Eugene P.: "Characteristic Vectors of Bordered Matrices With Infinite Dimensions," *The Annals of Mathematics, 2nd Ser.*, Vol. **62**, No. 3 (Nov., 1955), pp. 548-564.

- [17] Wigner, Eugene P.: "On the Distribution of the Roots of Certain Symmetric Matrices," *The Annals of Mathematics, 2nd Ser.*, Vol. **67**, No. 2 (Mar., 1958), pp. 325-327.
- [18] Weibull, Jörgen W.: *Evolutionary Game Theory*, MIT Press, 1995. 邦訳: 大和瀬達二 (監訳) 『進化ゲームの理論』 オフィス カノウチ, 1998 年.