統計力学を用いた進化ゲーム理論
Evolutionary Game with Statistical Mechanics

Graduate Shool of Economics,
Kwansei Gakuin Univeristy　D3

吉川　満

mitsurukikkawa@hotmail.co.jp

第4回生物数学の理論とその応用（京都大学数理解析研究所） 2007年11月2日11:00-11:20

関西学院大学大学院経済学研究科研究会WEBの「学会報告のレジュメ等」からDownloadable

http://members.ld.infoseek.co.jp/kgu-gse/gakkai/gakkai.htm

CONTENTS

1. INTRODUCTION

OUR CONTRIBUTION

- 進化ゲーム理論を統計力学によって、定式化を行った。→変数が1つ増えた。
- 「Phase Transition(相転移) 」を利用した、均衡の生成

具体的には、統計力学で最も簡単なIsingモデル、SKモデルを用いて、対称2人、非対称2人ゲームを定式化した。さらには動学化し、多重均衡の存在を示した。

→変数によって既存の進化ゲーム理論と一致し、しない場合が存在。

MOVITATION

- 高次元系を分析したい。

→しかし、数千、数万の方程式を取り扱うことは無理。
安定性に限っては、Routh-Hurwitzの定理から4本以上となると分からないに等しい。

分布関数を用いて、高次元系を分析する

→Statistical mechanics

今までどのようにして様々な主体がいるゲームを分析してきたのか？

→平均のみを考え、低次元系へ。

Replicator方程式は、平均場との相互作用：その大小で、戦略の増減が決まる。

→こんなに単純でよいのか？仮に戦略が2つの場合であっても、複雑な状況があるのではないか？

LOTKA-VOLTERRA SYSTEM

$$\boxed{dx/dt = A\,\mathbf{x}}$$

where A:Random Matrix, **x**: vector.

→GAM Theory (**Gardner and Ashby(Nature, 1970)**,**May(Nature ,1972))**

These Papers examine the relation between "COMPLEXITY" and "STABILITY".

（Background：Ecological Systems are stable, but they become unstable with mathematics）

では、 Replicator Systemではどうように定式かできるのか？結論は同じか？

MATHEAMTICAL BIOLOGY

- 統計力学や格子モデルを使った空間構造のモデルは以前から研究されている。

例）

- Matsuda,et al.(1992), Harada and Iwasa(1994), Namakaru, et al. (1997) …..

→生物学の関心を、「出生、死亡」を当初から前提。

我々は戦略の変化のみに着目。均衡はどのようになっているのか。Minimalなもの。

2. Precedent Papers and Review

PRECEDENT PAPERS

- **Diederich and Opper(PRA,1989)、Tokita and Yasutomi (PRE,1999):** 進化ゲーム理論に統計力学を導入した。

→　Spin Glass　で使われているSKモデルを直接応用し、定式化を行った。

→　そのため、物理学の仮定が課されており、不適ではないか？また既存の理論との対比が欠如し、分かりづらい。特にTokita and Yasutomi (1999)ではEuler法を使って、連続時間体系から離散時間体系へと変形している。確率変数もlog の形へ変形。多くの人が認める方法を用いていない。ただしシミュレーション結果は興味深いものとなっている。

RANDOM INTERACTION (SK MODEL)
Diederich and Opper(1989)

- Replicator Eq.:

$$\frac{dx_\nu}{dt} = x_\nu (f_\nu - \overline{f}), \quad for \quad \nu = 1, \cdots, N.$$

- Fitness Function: $f = -H = \dfrac{1}{2} \sum_{\nu\mu} x_\nu c_{\nu\mu} x_\mu ,$

where, $f_\nu = \dfrac{\partial f}{\partial x_\nu}, \quad c_{\nu\mu} = c_{\mu\nu} (\mu \neq \nu)$ This is a element of the Random Matrix , it is Gauss Distribution, Average is 0, Variance is 1/N.

以上の設定の下で、2つの戦略の分布を調べた。

We obtain the following Equations with Replica method under Quenched System.

$$u - v = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Delta}^{\infty} dz e^{-Z^2/2} (z + \Delta),$$

$$(u - v)^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Delta}^{\infty} dz e^{-Z^2/2} (z + \Delta)^2, \textit{where} \quad \Delta = \sqrt{q}(u - 2v)$$

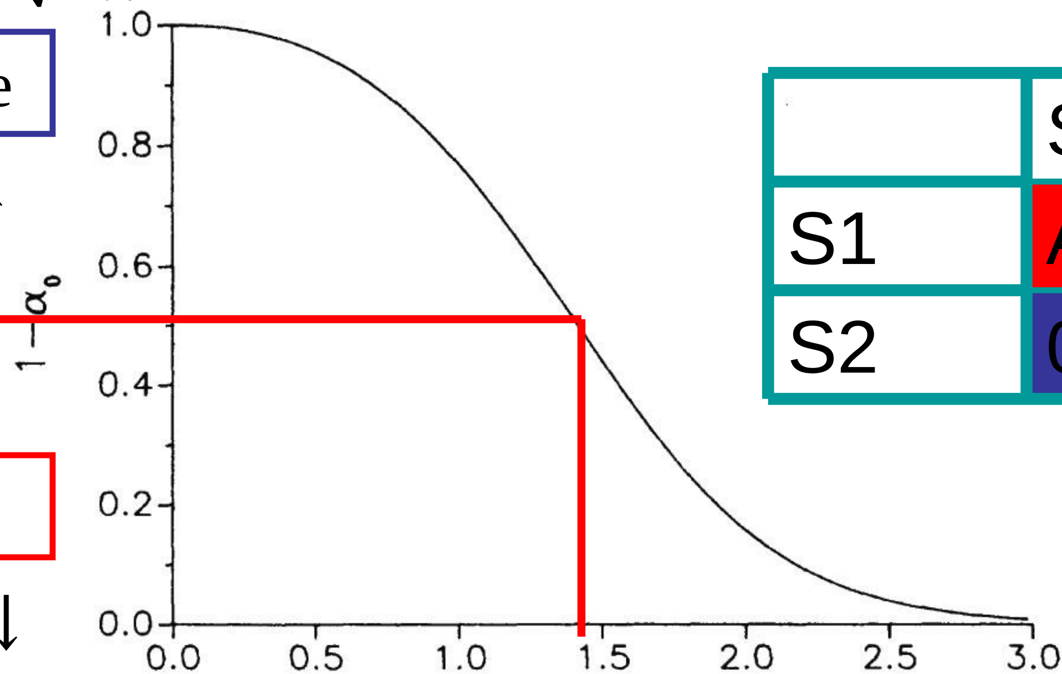
Competitive

↑↓、↓↑

0. 5

Cooperative

↑↑、↓↓



$\sqrt{2}$ u

Parameter u

	S1	S2
S1	A,A	0,0
S2	0,0	B,B

REVIEW: Symmetric and Asymmetic Games

- 対称2人ゲームと非対称2人ゲームの違い

→利得表が異なる(戦略が2つの場合)

タイプ2

タイプ1

	S1	S2
S1	A,A	C,B
S2	B,C	D,D

Symmetric Two Person Game

タイプ2

タイプ1

	S1	S2
S1	A,E	C,G
S2	B,F	D,H

Asymmetric Two Person Game

Replicator Equation：　1本　　2本

分析対象：

Symmetric ：競争系LV、 **Asymmetric** ：Prey-Predator など。

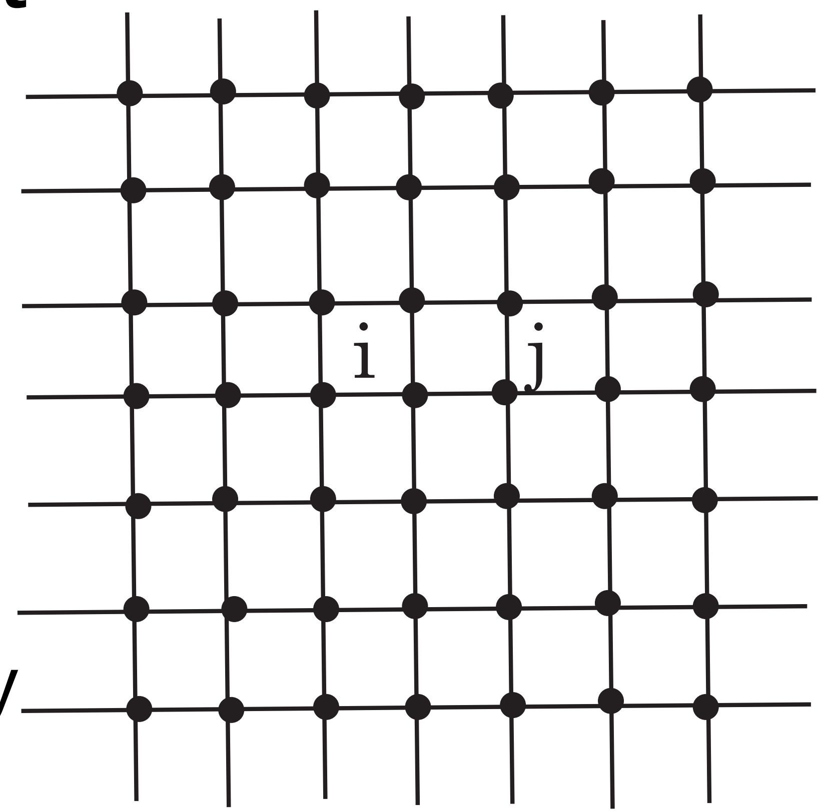
REVIEW: Ising Model

- Ising model ･･･相転移（異なる相へ移る）を記述する最も簡単なモデル。
- 金属に外場から磁化をかけ、ある臨界値（Curie温度）を超えると、磁石となる。
- 格子上にある（スピンの）状態 S_j：{-1, +1}, j=1,…N
- 　N個状態が「+1 or -1」にすべて揃ったら「cooperative」、「-1, 1」の組ならば「competitive」、
- Hamiltonian $$H = -J \sum_{i,j} S_i S_j$$

3. BASIC MODEL

MODEL：
Game: 2 types Strategy, 2 types Agent

- 多数の人がおり、2タイプの主体が1対1で出会い、2つの戦略を用いて、ゲームをする。
- In Sec.2, player i and j play a Game with Nearest Neighbor Interaction.
- In Sec.3, player i and j play a Game with Random Matching



Lattice Model

EXAMPLE 2.1, 2.2

	S1(1)	S2(2)
S1(1)	A,A	0,0
S2(2)	0,0	B,B

	S1(-1)	S2(+1)
S1(-1)	A,A	0,0
S2(+1)	0,0	B,B

where A,B > 0

Ising Model（Very Simple）

ASSUMPTION 2.3、PROPOSITON 2.4

- **ASSU.**： 各主体は高い利得・適応度を得ることを望んでいる.
- **PROP.**：仮定のもとで主体xのある戦略{Si},i=1,…,Nを取り、ある利得fを得るというゲームの状況下に戦略の分布は

$$\boxed{P(\{S_i\}) = Z^{-1}\exp(\gamma f)}$$

となる。ただし{Si} は主体i の戦略, γ は変数（例えば、正の情報）、f はある戦略{Si}を取ったときの利得・適応度、Zは規格化定数を表している。

- **INTERPRETATION**： ：利得が高ければ、その戦略をとる確率が高い。
- **DISTINCTIVE**：STATICS, Non- Externality

TRADITONAL EVOLUTIONARY GAME

- **ASSU.**：各主体は高い利得･適応度を得ることを望んでいる.
- Under this assumption, we obtain the unique solution: Selection Dy.→Replicator Eq.

Replicator Eq.

- $$\dot{x}_i = x_i\left(f_i - \overline{f}\right), i = 1\cdots, N.$$

INTERPRETATION：あるi番目の戦略は平均利得･適応度よりも高ければ、その戦略を確率1で選択する。

DISTINCTIVE： DYNAMICS, EXTERNALITY

DEFINITION 2.5

- **DEF.**：戦略が一定の秩序を持っているかどうかを判断する量を**秩序パラメータ**(order parameter) という概念を次のように導入する。

(2.2)

$$m = \langle S_i \rangle = \frac{1}{N} \sum_i S_i \equiv \sum_i S_i P(\{S_i\})$$

where 〈　〉 stands for the average.

EXAMPLE 2.6

- EXA.2.1を例にとる。このとき、

戦略1を確率1でとる場合、m＝1/2,

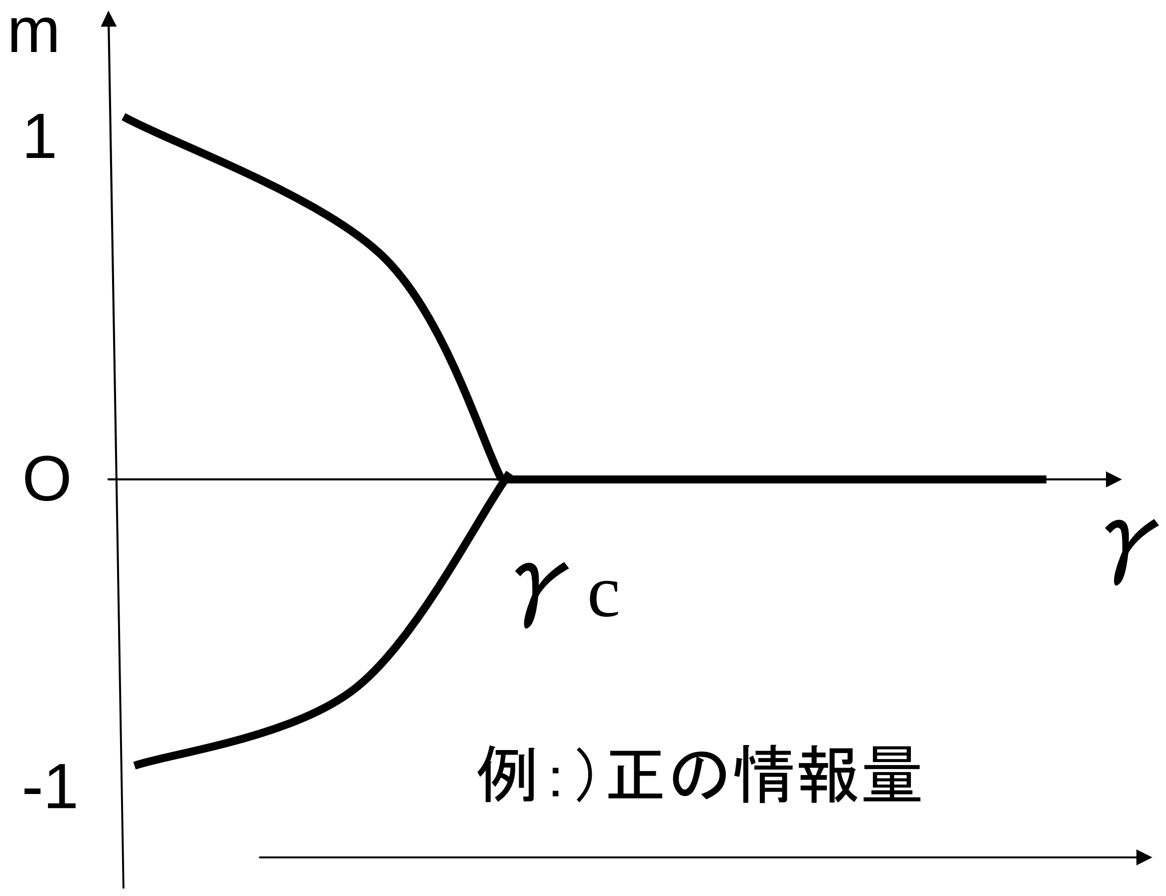
戦略2を確率1でとる場合、m＝1,

戦略1と2をランダムにとる場合、m＝3/4.

→m の値は、1/2 ≦m ≦ 1の間で、m=1/2に近ければ、戦略1を取る人が多いと分かり、m=1に近ければ、戦略2を取る人が多い。

	S1(1)	S2(2)
S1(1)	A,A	0,0
S2(2)	0,0	B,B

- EXAMPLE 2.2: Ising model
- Si={-1,1} → m= -1,0(random),1



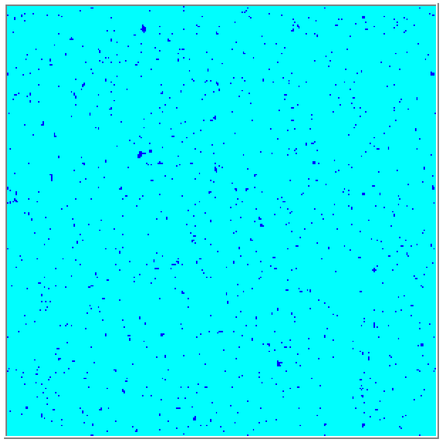
多い　　　　　　　　　　　　　　　　少ない

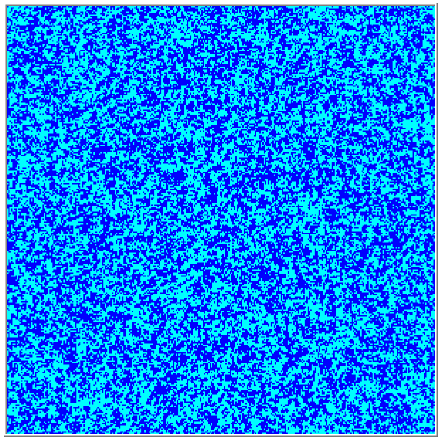
戦略はどちらか一方　　　　　　　　戦略はランダム

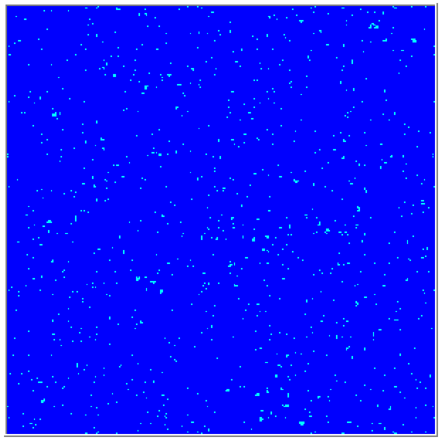
SIMULATION

先ほどの分岐図は、格子図で見ると、次のような図である。

SKY BULUE＝Strategy 1、BLUE＝Strategy 2







ORDERED TYPE １ NO ORDERED ORDERED TYPE 2

$m^* > 0$ $m^* = 0$ $m^* < 0$

（s1, s1 ）

s1とs2
がRandomに選択

（s2,s2）

EVOLUTIONARY STABLE STRATEGY（ESS)

DEF.: Weibull(1995): $x \in \Delta$ is an *evolutionary stable strategy (ESS)* if for every strategy $y \neq x$ there exists some $\overline{\varepsilon_y} \in (0,1)$ such that the following inequality holds for all $\varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon_y})$.

$$u[x, \varepsilon y + (1-\varepsilon)x] > u[y, \varepsilon y + (1-\varepsilon)x].$$

INTERPRETATION:どのような突然変異戦略を採用したとしても、既存戦略の方が効用が高い。

（ESS is the solution of the Replicator equation.）

PROPOSITION 2.8

PRO.: Weibull(1995): $x \in \Delta$ is evolutionary stable strategy if and only if it meets these first-order and second-order best-reply :

$$(2.4) \quad u(y,x) \le u(x,x), \quad \forall y,$$

Nash Eq.

$$(2.5) \quad \begin{array}{l} u(y,x) = u(x,x) \\ \Rightarrow u(y,y) < u(x,y), \end{array} \quad \forall y \ne x,$$

Asymptotic Stable Conditon

PROPOSITION 2.9

PRO.: 統計力学を用いた進化ゲーム理論において、進化的に安定な戦略とは次の条件を満たすことと同値である.

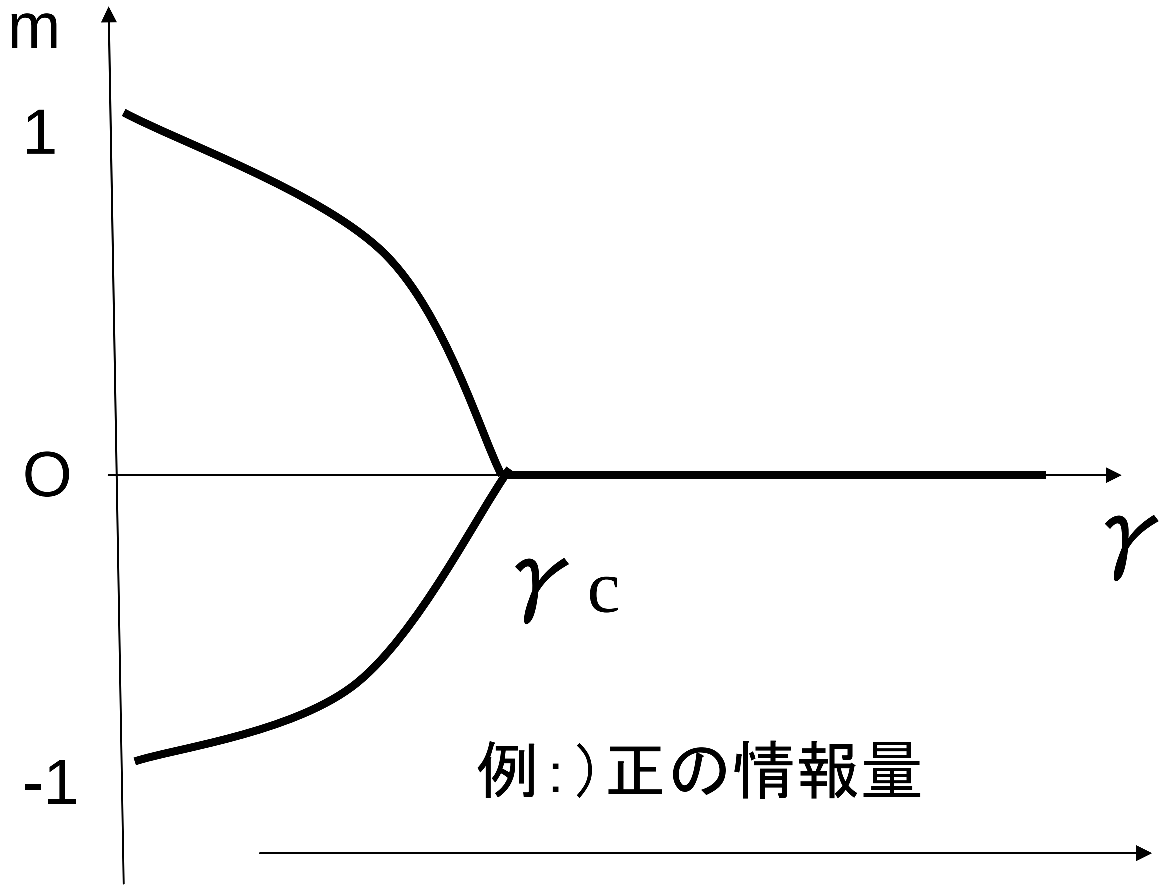
$$(2.4) \quad u(y,x) \le u(x,x), \quad \forall y,$$

$$(2.6) \quad \left| m - m^{*} \right| < \varepsilon \quad ,$$

Lyapunov Stable Condition

Where, m* は変数γが最大時のmの値を示している。

- EXAMPLE 2.2: Ising model
- Si={-1,1} → m= -1,0(random),1



多い　　　　　　　　　　　　　　　　　少ない

戦略はどちらか一方　　　　　　　　　　戦略はランダム

ASYMMETRIC TWO PERSON GAME

- 秩序パラメータをもう1つ定義し、ESSについては、PRO. 2.8の(2.6)の条件を次のように修正すれば、足りる。

$$(2.9) \quad \left| m'_1 - m^*_1 \right| < \varepsilon_1 \quad , \left| m'_2 - m^*_2 \right| < \varepsilon_2$$

SK MODEL

- Random Matching
- Payoff, Fitness

$$H\left(\left\{J_{ij}\right\}\right) = \sum_{i \neq j} J_{ij} S_i S_j$$

$$where \quad P\left(J_{ij}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi J^2}} \exp\left\{-\frac{(J_{ij} - J_0)^2}{2J^2}\right\}$$

J_0 : Average , J^2 : Variance

Anealed System → 主体はある程度自由にゲームをする相手を選ぶことができる。

- Free energy, 分布関数の配位平均.

$$F = \gamma \log \langle Z \rangle,$$

Probability of Matching

$$\langle Z \rangle = \sum_{\{S_i\}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{(ij)} dJ_{ij} P\{J_{ij}\} \exp(\gamma H\{J_{ij}\}),$$

Fitness

$$= \sum_{\{S_i\}} \exp\left[\sum_{(ij)} \left\{ \gamma J_0 S_i S_j + \frac{(\gamma J)^2}{2} (S_i S_j)^2 \right\} \right]$$

$$\underset{m}{Max} \quad F$$

Solved

$$F = \gamma \left[\sum_{[S_i]} \left\{ \gamma J_0 (\sum_i S_i)^2 + \frac{1}{2} (\gamma J)^2 (\sum_i S_i)^4 - \gamma J_0 N \sum_i S_i^2 - \frac{1}{2} (\gamma J)^2 N \sum_i S_i^4 \right\} \right]$$

- m=<Si>と置き、mについて微分すると、

$$\frac{\partial F}{\partial m} = 2\gamma^2 J_0 N^2 m + 2\gamma^3 J^2 N^4 m^3 = 0$$

$$m = 0 \quad or \quad \pm\sqrt{\frac{-J_0}{\gamma J^2 N^2}}$$

As N →∞, m = 0 .

第2節と同様に、秩序変数は0の場合を＋と－の値を持つ。さらに無限人のゲームでは秩序・均衡は存在しないことが分かった。

QUENCHIED SYSTEM

- 当初(Nature)から相互作用の仕方、強さが決まっている。

Free Energy $F = \gamma \langle \log Z \rangle$

Replica Method $\langle \log Z \rangle = \lim_{n \to 0} \left(\langle Z^n \rangle - 1 \right)$

Hubbard-Stranovich Trans. $\exp\left[\frac{a^2}{2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[ax - \frac{x^2}{2}\right] dx$

\+ saddle point method + replica symmetry

Solved

$$m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} z^2\right) \tanh\left(\gamma \widetilde{J} \sqrt{q} z + \gamma \widetilde{J_0} n\right) dz$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} z^2\right) \tanh^2\left(\gamma \widetilde{J} \sqrt{q} z + \gamma \widetilde{J_0} n\right) dz$$

4. EXTENSION

DYNAMICS

DYNAMICS

- Mater Equation

$$\frac{d}{dt} P\left(S_1, \cdots, S_N; t\right) = -\sum_j W_j(S_j) P\left(S_1, \cdots, S_N; t\right)$$

$$+ \sum_j W_j(-S_j) P\left(S_1, \cdots, -S_j, \cdots, S_N; t\right)$$

- Local Detail Balance Condition (Sufficient Condition)

$$\frac{W_i(S_i)}{W_i(-S_i)} = \frac{\exp(-\gamma E_i S_i)}{\exp(\gamma E_i S_i)}, \qquad where \quad E_i = \sum_j J_{ij} S_j$$

- Dynamics of the Ordered parameter

$$\tau \frac{d}{dt} \left\langle m \right\rangle_t = \left\langle \tanh \gamma E_i \right\rangle_t - m_t$$

- Dynamics of the Correlated function

$$\tau \frac{d}{dt} \left\langle S_i S_j \right\rangle_t = -2 \left\langle S_i S_j \right\rangle_t + \left\langle S_i \tanh \gamma E_j \right\rangle_t \left\langle S_j \tanh \gamma E_i \right\rangle_t$$

TAP EQUATION

- hjの導入→周りを見る度合い(EXTERNALITY)

$$H\left(\left\{J_{ij}\right\}\right)=\sum_{i\neq j}J_{ij}S_iS_j+\sum_{i\neq j}h_jS_j$$

Annealed System

→Solved $$h_j=2\gamma m(1-N)(J_0+J^2m^2)$$

秩序変数が自明なもの以外、不連続となるような点は存在しない。

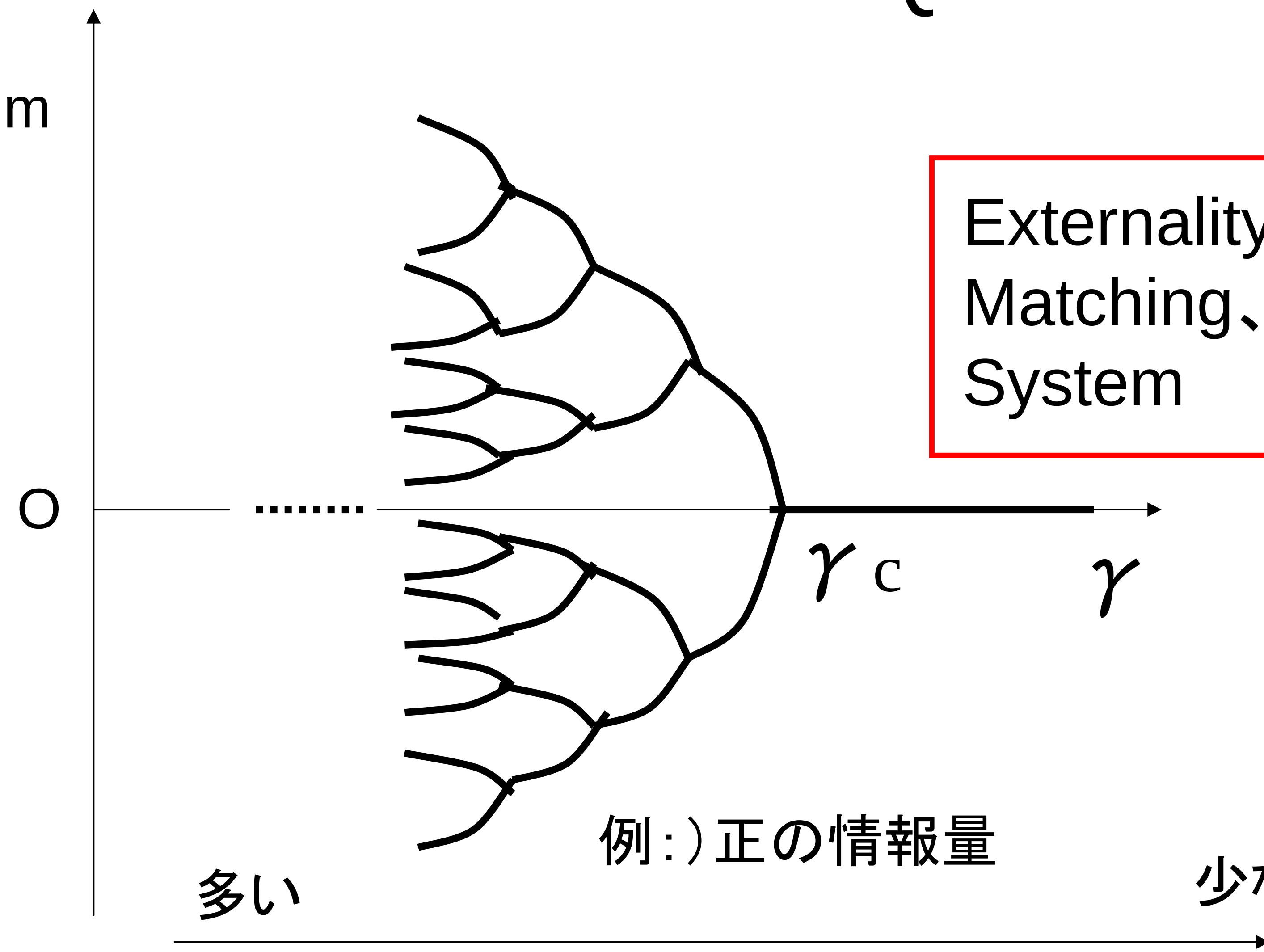
Quenched System

$$m_\lambda=\frac{1}{T-J_\lambda}h_\lambda$$

→最大固有値2Jのとき、秩序変数が不連続となる。

→Multiple Equilibria

MULTIPLE EQUIRIBRIA



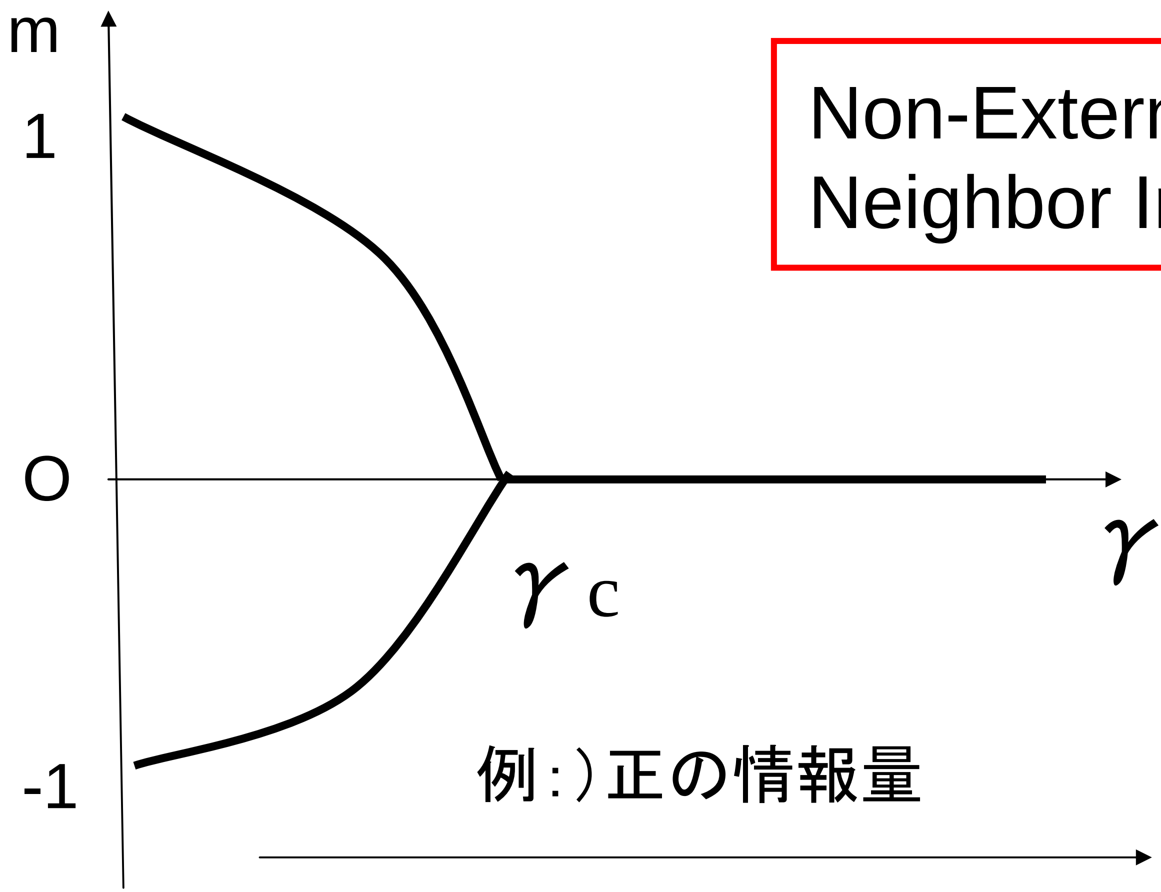
Externality、Random Matching、Quenched System

様々な均衡の存在＝いろいろな状況が均衡となりうる。

戦略に一致はなく、Random

- EXAMPLE 2.2: Ising model
- Si={-1,1} → m= -1,0(random),1

Non-Externality, Nearest Neighbor Interaction



多い
戦略はどちらか一方

少ない
戦略はランダム

5. Conclude and Future Work

SUMMARY

変数を一つ増やし(利得が高ければ、確率1で増加するものを、ある変数によるとした)、複雑な状況の存在を示した。

- **Sec. 2**: Ising Model を用いて、最近接とゲームを行うモデルの定式化し、ESSを特徴づけた。
- **Sec. 3**: SK Modelを用いて、ランダムにマッチングし、ゲームを行うモデルの定式化を行った。

→2つのモデルとも変数によって、ランダムになるものと、2つの秩序・均衡が存在するということを示した。また無限人経済では均衡は存在しない。

- **Sec.4**:動学にし, 外部性が存在する、Quenched Systemでは多重解の存在→多様な状態を記述？

FUTURE WORKS：参入・退出をちゃんと考える、数学的にちゃんと書く。

Fin

NOTICE：THIS PRESENTATION

- この報告内容は2007年度関西学院大学経済学研究会主催の「夏季研究会」にて報告したものを、加筆・訂正したものである。具体的には「動学」の部分を大幅に加筆し、イントロ部分にあった経済学の流れを汲んだサーベイ部分を数理生物学の研究の流れを汲むように書き直した。経済学との関連は夏季研究会でのファイルを参照のこと。

2007年10月　　吉川　満。